L'inégalité de Strichartz pour l'équation de Schrödinger sur une variété semi-périodique

Le cas de $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$

Tarik Belmekki

Université Pierre et Marie Curie – Master 2 ANEDP

Décembre 2014

Objectif

Théorème (Ionescu-Pausader 2012)

Si $u_0 \in H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$ *alors il existe une unique solution* $u \in X^1(I)$ *de l'équation suivante*

$$(i\partial_t + \Delta)u = u|u|^2, \qquad u(0) = u_0. \tag{1}$$

Objectif

Théorème (Ionescu-Pausader 2012)

Si $u_0 \in H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$ *alors il existe une unique solution* $u \in X^1(I)$ *de l'équation suivante*

$$(i\partial_t + \Delta)u = u|u|^2, \qquad u(0) = u_0. \tag{1}$$

Définition

$u \in C(I; H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$ est une **solution forte** de (1) si $u \in X^1(I)$ et $\forall t, s \in I$

$$u(t) = e^{i(t-s)\Delta}u(s) - i\int_s^t e^{i(t-t')\Delta}\left(u(t')|u't')|^2\right) dt'$$

Structure de la présentation

1. Introduction
2. Les estimations de Strichartz sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$
3. Les espaces fonctionnels
4. Existence locale

Théorème (Ginibre-Velo 1985)

Pour toute paire admissible (q, r) *et pour toute fonction* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, *on a*

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim_q \|\varphi\|_{L^2} \tag{2}$$

où (q, r) *est une paire admissible si*
$(q, r) \in (2, \infty] \times [2, \infty], 2/q = d/2 - d/r.$

Les inégalités de Strichartz sur $\mathbb{R}^d$

Théorème (Ginibre-Velo 1985)

Pour toute paire admissible (q, r) *et pour toute fonction* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, *on a*

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim_q \|\varphi\|_{L^2} \tag{2}$$

où (q, r) *est une paire admissible si*
$(q, r) \in (2, \infty] \times [2, \infty], 2/q = d/2 - d/r.$

Estimation de dispersion $L^1 \to L^\infty$

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}}\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

Les inégalités de Strichartz sur $\mathbb{R}^d$

Théorème (Ginibre-Velo 1985)

Pour toute paire admissible (q, r) et pour toute fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim_q \|\varphi\|_{L^2} \tag{2}$$

où (q, r) est une paire admissible si
$(q, r) \in (2, \infty] \times [2, \infty], 2/q = d/2 - d/r.$

Estimation de dispersion $L^1 \to L^\infty$

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

$$e^{it\Delta}\varphi(x) = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u(y)dy$$

Les inégalités de Strichartz sur $\mathbb{T}^d$

Théorème (Bourgain 1993)

$\forall N \geq 1$ *on a*

$$\|P_N e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p_{t,x}(\mathbb{T}^{1+d})} \lesssim N^{\frac{d}{2}-\frac{d+2}{p}} \|P_N\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \tag{3}$$

Les inégalités de Strichartz sur $\mathbb{T}^d$

Théorème (Bourgain 1993)

$\forall N \geq 1$ *on a*

$$\|P_N e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p_{t,x}(\mathbb{T}^{1+d})} \lesssim N^{\frac{d}{2}-\frac{d+2}{p}} \|P_N\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \tag{3}$$

où (d, p) satisfait

$$\begin{aligned} d &= 1, \quad p > 6; \\ d &= 2, 3, \quad p > 4; \\ d &\geq 4, \quad p \geq \frac{2(d+4)}{d}. \end{aligned} \tag{4}$$

- Bourgain 1993

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^6_{t,x}(\mathbb{T}^2)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2_x(\mathbb{T})} \text{ n'est pas vérifiée.}$$

- Bourgain 1993

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^6_{t,x}(\mathbb{T}^2)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2_x(\mathbb{T})} \text{ n'est pas vérifiée.}$$

- Takaoka-Tzvetkov 2001

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^4_{t,x}(\mathbb{T}^3)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2_x(\mathbb{T}^2)} \text{ n'est pas vérifiée.}$$

Soit $\phi^1 : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction régulière et paire telle que $\phi^1(\omega) = 1$ si $|\omega| \leq 1$ et $\phi^1(\omega) = 0$ si $|\omega| \geq 2$. Soit
$\phi^4 : \mathbb{R}^4 \to [0,1], \phi^4(\omega) = \phi^1(\omega_1)^2\phi^1(\omega_2)^2\phi^1(\omega_3)^2\phi^1(\omega_4)^2$.

Soit $\phi^1 : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction régulière et paire telle que $\phi^1(\omega) = 1$ si $|\omega| \leq 1$ et $\phi^1(\omega) = 0$ si $|\omega| \geq 2$. Soit
$\phi^4 : \mathbb{R}^4 \to [0,1], \phi^4(\omega) = \phi^1(\omega_1)^2\phi^1(\omega_2)^2\phi^1(\omega_3)^2\phi^1(\omega_4)^2$.
On définit les projecteurs de Littlewood-Paley $P_{\leq N}$ et P_N où $N = 2^j \geq 1$ est un nombre dyadique par

$$\begin{aligned} \widehat{P_{\leq N} f}(\xi) &:= \phi^4(\xi/N)\hat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3, \\ \widehat{P_N f}(\xi) &:= \psi^4(\xi/N)\hat{f}(\xi) = [\phi^4(\xi/N) - \phi^4(2\xi/N)]\hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Soit $\phi^1 : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction régulière et paire telle que $\phi^1(\omega) = 1$ si $|\omega| \leq 1$ et $\phi^1(\omega) = 0$ si $|\omega| \geq 2$. Soit
$\phi^4 : \mathbb{R}^4 \to [0,1], \phi^4(\omega) = \phi^1(\omega_1)^2\phi^1(\omega_2)^2\phi^1(\omega_3)^2\phi^1(\omega_4)^2$.
On définit les projecteurs de Littlewood-Paley $P_{\leq N}$ et P_N où $N = 2^j \geq 1$ est un nombre dyadique par

$$\widehat{P_{\leq N} f}(\xi) := \phi^4(\xi/N)\hat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3,$$
$$\widehat{P_N f}(\xi) := \psi^4(\xi/N)\hat{f}(\xi) = [\phi^4(\xi/N) - \phi^4(2\xi/N)]\hat{f}(\xi).$$

Enfin, on a la décomposition suivante

$$f = \sum_{j\geq 1} P_{2^j} f + P_{\leq 1} f.$$

Théorème (Ionescu-Pausader 2012)

Soit $p_1 = \frac{18}{5}$. $\forall p > p_1, \forall N \geq 1, \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$, *on a*

$$\|e^{it\Delta} P_N \varphi\|_{L^p_{t,x}([-1,1]\times(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3))} \lesssim_p N^{2-\frac{6}{p}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)}. \tag{5}$$

Théorème (Ionescu-Pausader 2012)

Soit $p_1 = \frac{18}{5}$. $\forall p > p_1, \forall N \geq 1, \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$, *on a*

$$\|e^{it\Delta} P_N \varphi\|_{L^p_{t,x}([-1,1] \times (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3))} \lesssim_p N^{2-\frac{6}{p}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)}. \tag{5}$$

Cas $p = \infty$

Le théorème de Ionescu-Pausader est immédiat pour $p = \infty$.

Théorème (Ionescu-Pausader 2012)

Soit $p_1 = \frac{18}{5}$. $\forall p > p_1, \forall N \geq 1, \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$, *on a*

$$\|e^{it\Delta} P_N \varphi\|_{L^p_{t,x}([-1,1]\times(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3))} \lesssim_p N^{2-\frac{6}{p}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)}. \tag{5}$$

Cas $p = \infty$

Le théorème de Ionescu-Pausader est immédiat pour $p = \infty$.

En effet

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^\infty_{t,x}} \lesssim \|e^{-it|\xi|^2} e^{ix\xi} \widehat{P_N\varphi}\|_{L^\infty_t L^1_\xi} \lesssim \|\widehat{P_N\varphi}\|_{L^1_\xi} \lesssim N^2 \|\hat{\varphi}\|_{L^2_\xi} \lesssim N^2 \|\varphi\|_{L^2_x}.$$

Donc par interpolation, il suffit de traiter le cas $p \in (18/5, 4)$.

Lemme

Supposons que $p_0 > \frac{18}{5}, N \geq 1, \lambda \in J_{N,p_0} = [N^{(2p_0-6)/(p_0-2)}, 4N^2], \|m\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3)} \leq 1$ *et* $m(\xi) = 0$ *pour* $|\xi| > 2N$. *Alors pour* $I = [-2^{-10}, 2^{-10}]$ *et en posant*

$$S_\lambda = \left\{(t,x) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 : \left| \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} m(\xi) e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} d\xi \right| \geq \lambda \right\}, \tag{6}$$

on a

$$\mathrm{mes}(S_\lambda) \lesssim N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0}. \tag{7}$$

Corollaire

Soient $p > \frac{18}{5}$ *et* $F(t,x) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} m(\xi) d\xi$. *Alors*

$$\|\mathbf{1}_I(t) \cdot F\|_{L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)} \lesssim_p N^{2-\frac{6}{p}}$$

Corollaire

Soient $p > \frac{18}{5}$ *et* $F(t,x) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} m(\xi) d\xi$. *Alors*

$$\|\mathbf{1}_I(t) \cdot F\|_{L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)} \lesssim_p N^{2-\frac{6}{p}}$$

Donc

$$e^{it\Delta} P_N \varphi(t,x) = (2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} \widehat{P_N\varphi}(\xi) d\xi$$

Corollaire

Soient $p > \frac{18}{5}$ *et* $F(t,x) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} m(\xi) d\xi$. *Alors*

$$\|\mathbf{1}_I(t) \cdot F\|_{L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)} \lesssim_p N^{2-\frac{6}{p}}$$

Donc

$$e^{it\Delta} P_N \varphi(t,x) = (2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} \widehat{P_N\varphi}(\xi) d\xi$$

$m(\xi) = \frac{\widehat{P_N\varphi}(\xi)}{\|\varphi\|_{L^2_x}}$, on voit que $m(\xi) = 0$ pour $|\xi| > 2N$ et par Parseval on a

$$\|m\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3)} = \frac{\|\widehat{P_N\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3)}}{\|\varphi\|_{L^2_x}} = (2\pi)^2 \frac{\|P_N\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)}}{\|\varphi\|_{L^2_x}} \lesssim 1$$

$$e^{it\Delta} P_N \varphi = (2\pi)^{-4} \|\varphi\|_{L^2_x} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} m(\xi) d\xi = (2\pi)^{-4} \|\varphi\|_{L^2_x} F(t,x)$$

$$e^{it\Delta} P_N \varphi = (2\pi)^{-4} \|\varphi\|_{L^2_x} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} m(\xi) d\xi = (2\pi)^{-4} \|\varphi\|_{L^2_x} F(t,x)$$

Par corollaire

$$e^{it\Delta} P_N \varphi = (2\pi)^{-4} \|\varphi\|_{L^2_x} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} m(\xi) d\xi = (2\pi)^{-4} \|\varphi\|_{L^2_x} F(t,x)$$

Par corollaire

$$\|e^{it\Delta} P_N \varphi\|_{L^p_{t,x}(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)} \lesssim (2\pi)^{-4} N^{2-\frac{6}{p}} \|\varphi\|_{L^2_x}$$

On suppose que $N \gg 1$ et on définit le noyau $K_N : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \to \mathbb{C}$,

$$K_N(t,x) = \phi^1(2^5 t/(2\pi)) \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} \phi^4(\xi/N) d\xi.$$

On suppose que $N \gg 1$ et on définit le noyau $K_N : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \to \mathbb{C}$,

$$K_N(t,x) = \phi^1(2^5 t/(2\pi)) \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} \phi^4(\xi/N) d\xi.$$

Soit $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \to \mathbb{C}$ une fonction fixée telle que $|f| \leq 1_{S_\lambda}$ et

$$\lambda \, \mathrm{mes}(S_\lambda) \leq \left| \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3} f(t,x) \cdot \left[\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} m(\xi) e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} d\xi \right] dxdt \right|. \qquad (8)$$

On suppose que $N \gg 1$ et on définit le noyau $K_N : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \to \mathbb{C}$,

$$K_N(t,x) = \phi^1(2^5 t/(2\pi)) \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} \phi^4(\xi/N) d\xi.$$

Soit $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \to \mathbb{C}$ une fonction fixée telle que $|f| \leq 1_{S_\lambda}$ et

$$\lambda \operatorname{mes}(S_\lambda) \leq \left| \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3} f(t,x) \cdot \left[\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^3} m(\xi) e^{-it|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} d\xi \right] dxdt \right|. \qquad (8)$$

$$\lambda^2 \operatorname{mes}(S_\lambda)^2 \leq \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3} f(t,x)\overline{f(s,y)} K_N(t-s, x-y) dtdxdsdy. \qquad (9)$$

Estimation de Bourgain sur $\mathbb{T}^3$ + dispersion sur $\mathbb{R}$

Estimation de Bourgain sur $\mathbb{T}^3$ + dispersion sur $\mathbb{R}$

$$|K_N(t,x)| \lesssim \frac{N^3}{q^{\frac{3}{2}}\left[1 + N\left|\frac{t}{2\pi} - \frac{a}{q}\right|^{\frac{1}{2}}\right]^3} \cdot \frac{N}{1 + N\left|\frac{t}{2\pi}\right|^{\frac{1}{2}}}. \tag{10}$$

Lemme (Décomposition de K_N)

Soient $\lambda \in J_{p_0,N}$ *et* $r \in [2,4]$, *alors on peut décomposer le noyau sous la forme*

$$K_N = K_N^{1,\lambda} + K_N^{2,\lambda} + K_N^{3,\lambda}$$

tels que

$$\|K_N^{1,\lambda}\|_{L^\infty_{t,x}} \leq \lambda^2/2, \tag{11}$$

$$\|\mathcal{F}K_N^{2,\lambda}\|_{L^\infty_{\tau,\xi}} \lesssim \lambda^2(N^{2p_0-6}\lambda^{-p_0}), \tag{12}$$

$$\|\mathcal{F}K_N^{3,\lambda}\|_{L^r_{\tau,\xi}} \lesssim \lambda^2(N^{2p_0-6}\lambda^{-p_0})^{(r-1)/r}. \tag{13}$$

Les espaces Fonctionnels

Définition (Atome)

$a : \mathbb{R} \to L^2$ est un U^p-atome si

$$a = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k)} \phi_{k-1}, \qquad \sum_{k=1}^{K} \|\phi_k\|_{L^2}^p = 1, \qquad p \in [1, +\infty)$$

Les espaces Fonctionnels

Définition (Atome)

$a : \mathbb{R} \to L^2$ est un U^p-atome si

$$a = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{1}_{[t_{k-1},t_k)} \phi_{k-1}, \qquad \sum_{k=1}^{K} \|\phi_k\|_{L^2}^p = 1, \qquad p \in [1, +\infty)$$

Définition

$u \in U^P(\mathbb{R}, L^2)$ si $u = \sum_{j\geq 1} \lambda_j a_j$ où les a_j sont des U^p-atomes et $(\lambda_j) \in l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$

Les espaces Fonctionnels

Définition (Atome)

$a : \mathbb{R} \to L^2$ est un U^p-atome si

$$a = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{1}_{[t_{k-1},t_k)} \phi_{k-1}, \qquad \sum_{k=1}^{K} \|\phi_k\|_{L^2}^p = 1, \qquad p \in [1,+\infty)$$

Définition

$u \in U^P(\mathbb{R}, L^2)$ si $u = \sum_{j\geq 1} \lambda_j a_j$ où les a_j sont des U^p-atomes et $(\lambda_j) \in l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$

On munit $U^p(\mathbb{R}, L^2)$ de la norme suivante

$$\|u\|_{U^p} := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| : u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j, \lambda_j \in \mathbb{C}, a_j \text{ des } U^p \text{ atomes} \right\}$$

Les espaces fonctionnels

- $U^p(\mathbb{R}, L^2)$ est un espace de Banach.

Les espaces fonctionnels

- $U^p(\mathbb{R}, L^2)$ est un espace de Banach.
- Pour $1 \leq p < q < \infty$ on a $U^p(\mathbb{R}, L^2) \hookrightarrow U^q(\mathbb{R}, L^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$.

- $U^p(\mathbb{R}, L^2)$ est un espace de Banach.
- Pour $1 \leq p < q < \infty$ on a $U^p(\mathbb{R}, L^2) \hookrightarrow U^q(\mathbb{R}, L^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$.

Définition

$U^p_\Delta(\mathbb{R}, H^s)$ est défini par

$$\|u\|_{U^p_\Delta(\mathbb{R},H^s)} = \|e^{-it\Delta}u\|_{U^p(\mathbb{R},H^s)}$$

Existence locale

Théorème

$\forall p > \frac{18}{5}$, $\forall C \in \mathcal{C}_N$, *on a*

$$\|P_C u\|_{L^p([-1,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)} \lesssim N^{2-6/p} \|P_C \varphi\|_{U^p_\Delta(\mathbb{R},L^2)}$$

Existence locale

Théorème

$\forall p > \frac{18}{5}$, $\forall C \in \mathcal{C}_N$, on a

$$\|P_C u\|_{L^p([-1,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)} \lesssim N^{2-6/p}\|P_C\varphi\|_{U^p_\Delta(\mathbb{R},L^2)}$$

$u \in U^p_\Delta(\mathbb{R}, L^2)$. Alors $\exists v \in U^p(\mathbb{R}, L^2)$ telle que $u(t) = e^{it\Delta}v(t)$.

Théorème

$\forall p > \frac{18}{5}$, $\forall C \in \mathcal{C}_N$, *on a*

$$\|P_C u\|_{L^p([-1,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)} \lesssim N^{2-6/p}\|P_C\varphi\|_{U^p_\Delta(\mathbb{R},L^2)}$$

$u \in U^p_\Delta(\mathbb{R}, L^2)$. Alors $\exists v \in U^p(\mathbb{R}, L^2)$ telle que $u(t) = e^{it\Delta}v(t)$.

$$\|P_C u\|_{L^p_{t,x}} = \|P_C e^{it\Delta} v\|_{L^p_{t,x}} = \|P_C(\sum_{j\geq 1}\lambda_j \sum_{k=1}^{K_j} \mathbf{1}_{[t^j_{k-1},t^j_k)} e^{it\Delta}\varphi^j_{k-1})\|_{L^p_{t,x}}$$

Existence locale

Théorème

$\forall p > \frac{18}{5}$, $\forall C \in \mathcal{C}_N$, *on a*

$$\|P_C u\|_{L^p([-1,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)} \lesssim N^{2-6/p} \|P_C \varphi\|_{U^p_\Delta(\mathbb{R},L^2)}$$

$u \in U^p_\Delta(\mathbb{R}, L^2)$. Alors $\exists v \in U^p(\mathbb{R}, L^2)$ telle que $u(t) = e^{it\Delta} v(t)$.

$$\|P_C u\|_{L^p_{t,x}} = \|P_C e^{it\Delta} v\|_{L^p_{t,x}} = \|P_C (\sum_{j\geq 1} \lambda_j \sum_{k=1}^{K_j} \mathbf{1}_{[t^j_{k-1}, t^j_k)} e^{it\Delta} \varphi^j_{k-1})\|_{L^p_{t,x}}$$

$$\leq \sum_{j\geq 1} |\lambda_j| \left\| \sum_{k=1}^{K_j} \mathbf{1}_{[t^j_{k-1}, t^j_k)} \|P_C e^{it\Delta} \varphi^j_{k-1}\|_{L^p_x} \right\|_{L^p_t}$$

Existence locale

$$\leq \sum_{j\geq 1} |\lambda_j| \left\| \left(\sum_{k=1}^{K_j} |\mathbf{1}_{[t^j_{k-1},t^j_k)}|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{K_j} \|P_C e^{it\Delta}\varphi^j_{k-1}\|^p_{L^p_x}\right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L^p_t}$$

Existence locale

$$\leq \sum_{j\geq 1} |\lambda_j| \left\| (\sum_{k=1}^{K_j} |\mathbf{1}_{[t^j_{k-1},t^j_k)}|^{p'})^{\frac{1}{p'}} (\sum_{k=1}^{K_j} \|P_C e^{it\Delta}\varphi^j_{k-1}\|^p_{L^p_x})^{\frac{1}{p}} \right\|_{L^p_t}$$

$$\leq \sum_{j\geq 1} |\lambda_j| \left(\sum_{k=1}^{K_j} \|P_C e^{it\Delta}\varphi^j_{k-1}\|^p_{L^p_{t,x}} \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \sum_{j\geq 1} |\lambda_j| \left(\sum_{k=1}^{K_j} N^{2p-6} \|P_C \varphi^j_{k-1}\|^p_{L^2_x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Existence locale

$$\leq \sum_{j\geq 1} |\lambda_j| \left\| \Big(\sum_{k=1}^{K_j} |\mathbf{1}_{[t_{k-1}^j, t_k^j)}|^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\sum_{k=1}^{K_j} \|P_C e^{it\Delta} \varphi_{k-1}^j\|_{L_x^p}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_t^p}$$

$$\leq \sum_{j\geq 1} |\lambda_j| \left(\sum_{k=1}^{K_j} \|P_C e^{it\Delta} \varphi_{k-1}^j\|_{L_{t,x}^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \sum_{j\geq 1} |\lambda_j| \left(\sum_{k=1}^{K_j} N^{2p-6} \|P_C \varphi_{k-1}^j\|_{L_x^2}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim \sum_{j\geq 1} |\lambda_j| \cdot N^{2-6/p} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{K_j} \|P_C \varphi_{k-1}^j\|_{L_x^2}^p}_{=1} \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim N^{2-6/p} \|P_C u\|_{U_\Delta^p(\mathbb{R}, L^2)}$$

Existence locale

Définition

$$\|h\|_{N(I)} := \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} h(s) ds \right\|_{X^1(I)}$$

Existence locale

Définition

$$\|h\|_{N(I)} := \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} h(s) ds \right\|_{X^1(I)}$$

Lemme (Contrôle du terme non linéaire)

Pour $u_k \in X^1(I), k = 1, 2, 3, |I| \leq 1$, *en notant* $\tilde{u}_k = u_k$ *ou* $\tilde{u}_k = \bar{u}_k$, *on a*

$$\left\| \prod_{k=1}^{3} \tilde{u}_k \right\|_{N(I)} \lesssim \sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \|u_i\|_{X^1(I)} \|u_j\|_{Z'(I)} \|u_k\|_{Z'(I)}. \tag{14}$$

Théorème

Soit $E > 0$ *fixé. Il existe un* $\delta_0 = \delta_0(E)$ *tel que si*

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{Z'(I)} < \delta \tag{15}$$

pour $\delta \leq \delta_0$, $0 \in I$ *avec* $|I| \leq 1$ *et pour* $u_0 \in H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$ *telle que* $\|u_0\|_{H^1} \leq E$*, alors il existe une unique solution forte de (1)* $u \in X^1(I)$ *telle que* $u(0) = u_0$.

Existence locale
Preuve

$$\|u\|^2_{X^1(I)} = \sum_{z\in\mathbb{Z}^4} \langle\xi\rangle^2 \|P_{C_z} u\|^2_{U^p_\Delta(\mathbb{I},L^2)}, \qquad C_z = z + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^4$$

Existence locale
Preuve

$$\|u\|_{X^1(I)}^2 = \sum_{z\in\mathbb{Z}^4} \langle \xi\rangle^2 \|P_{C_z} u\|_{U_\Delta^p(\mathbb{I},L^2)}^2, \qquad C_z = z + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^4$$

$$\|u\|_{Z(I)} := \sup_{J\subseteq I, |J|\leq 1} \left\| \left(\sum_N N^2 \|P_N u(t)\|_{L^4_{(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)}}^4 \right)^{\frac{1}{4}} \right\|_{L_t^4(J)}$$

Existence locale

Preuve

$$\|u\|_{X^1(I)}^2 = \sum_{z\in\mathbb{Z}^4} \langle \xi \rangle^2 \|P_{C_z} u\|_{U_\Delta^p(\mathbb{I},L^2)}^2, \qquad C_z = z + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^4$$

$$\|u\|_{Z(I)} := \sup_{J\subseteq I, |J|\leq 1} \left\| \left(\sum_N N^2 \|P_N u(t)\|_{L^4_{(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)}}^4 \right)^{\frac{1}{4}} \right\|_{L_t^4(J)}$$

$$\|u\|_{Z'(I)} = \|u\|_{X^1(I)}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{Z(I)}^{\frac{1}{4}}, \qquad \forall x \in X^1(I)$$

$$\|u\|^2_{X^1(I)} = \sum_{z\in\mathbb{Z}^4} \langle\xi\rangle^2 \|P_{C_z} u\|^2_{U^p_\Delta(\mathbb{I},L^2)}, \qquad C_z = z + [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^4$$

$$\|u\|_{Z(I)} := \sup_{J\subseteq I, |J|\leq 1} \left\| \left(\sum_N N^2 \|P_N u(t)\|^4_{L^4_{(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)}} \right)^{\frac{1}{4}} \right\|_{L^4_t(J)}$$

$$\|u\|_{Z'(I)} = \|u\|^{\frac{3}{4}}_{X^1(I)} \|u\|^{\frac{1}{4}}_{Z(I)}, \qquad \forall x \in X^1(I)$$

Par Strichartz on a $X^1(I) \hookrightarrow Z'(I)$.

$$\|u\|_{X^1(I)}^2 = \sum_{z\in\mathbb{Z}^4} \langle\xi\rangle^2 \|P_{C_z} u\|_{U_\Delta^p(\mathbb{I},L^2)}^2, \qquad C_z = z + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^4$$

$$\|u\|_{Z(I)} := \sup_{J\subseteq I, |J|\leq 1} \left\| \left(\sum_N N^2 \|P_N u(t)\|_{L^4_{(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)}}^4 \right)^{\frac{1}{4}} \right\|_{L_t^4(J)}$$

$$\|u\|_{Z'(I)} = \|u\|_{X^1(I)}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{Z(I)}^{\frac{1}{4}}, \qquad \forall x \in X^1(I)$$

Par Strichartz on a $X^1(I) \hookrightarrow Z'(I)$.

$$U_\Delta^p(I, H^1) \hookrightarrow X^1(I)$$

Pour $E, a > 0$, on définit

$$\mathcal{S} = \{u \in X^1(I) : \|u\|_{X^1(I)} \leq 2E, \|u\|_{Z'(I)} \leq a\}$$

Pour $E, a > 0$, on définit

$$\mathcal{S} = \{u \in X^1(I) : \|u\|_{X^1(I)} \leq 2E, \|u\|_{Z'(I)} \leq a\}$$

On a donc $\forall u, v \in \mathcal{S}$

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X^1(I)} \lesssim \|u - v\|_{X^1(I)} (\|u\|_{Z'(I)} + \|v\|_{Z'(I)})(\|u\|_{X^1(I)} + \|v\|_{X^1(I)})$$

Pour $E, a > 0$, on définit

$$\mathcal{S} = \{u \in X^1(I) : \|u\|_{X^1(I)} \leq 2E, \|u\|_{Z'(I)} \leq a\}$$

On a donc $\forall u, v \in \mathcal{S}$

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X^1(I)} \lesssim \|u - v\|_{X^1(I)}(\|u\|_{Z'(I)} + \|v\|_{Z'(I)})(\|u\|_{X^1(I)} + \|v\|_{X^1(I)})$$

Donc

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X^1(I)} \lesssim Ea\|u - v\|_{X^1(I)}$$

Par ailleurs

$$\|\Phi(u)\|_{X^1(I)} \leq \|\Phi(0)\|_{X^1(I)} + \|\Phi(u) - \Phi(0)\|_{X^1(I)}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_{X^1(I)} &\leq \|\Phi(0)\|_{X^1(I)} + \|\Phi(u) - \Phi(0)\|_{X^1(I)} \\ &\leq \|e^{it\Delta} u_0\|_{X^1(I)} + \|u|u|^2\|_{N(I)}\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_{X^1(I)} &\leq \|\Phi(0)\|_{X^1(I)} + \|\Phi(u) - \Phi(0)\|_{X^1(I)} \\ &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{X^1(I)} + \|u|u|^2\|_{N(I)} \\ &\leq c\|e^{it\Delta}u_0\|_{U^p_\Delta(I,H^1)} + C\|u\|_{X^1(I)}\|u\|^2_{Z'(I)}\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{X^1(I)} &\leq \|\Phi(0)\|_{X^1(I)} + \|\Phi(u)-\Phi(0)\|_{X^1(I)} \\
&\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{X^1(I)} + \|u|u|^2\|_{N(I)} \\
&\leq c\|e^{it\Delta}u_0\|_{U^p_\Delta(I,H^1)} + C\|u\|_{X^1(I)}\|u\|^2_{Z'(I)} \\
&\leq c\,\underbrace{\|u_0\|_{U^p(I,H^1)}}_{=\|u_0\|_{H^1}} + CEa^2
\end{aligned}
$$

De même

$$\|\Phi(u)\|_{Z'(I)} \leq \|\Phi(0)\|_{Z'(I)} + \|\Phi(u) - \Phi(0)\|_{Z'(I)}$$

Existence locale

Preuve

De même

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_{Z'(I)} &\leq \|\Phi(0)\|_{Z'(I)} + \|\Phi(u) - \Phi(0)\|_{Z'(I)} \\ &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{Z'(I)} + \|u|u|^2\|_{N(I)}\end{aligned}$$

De même

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{Z'(I)} &\leq \|\Phi(0)\|_{Z'(I)} + \|\Phi(u) - \Phi(0)\|_{Z'(I)} \\
&\leq \|e^{it\Delta} u_0\|_{Z'(I)} + \|u|u|^2\|_{N(I)} \\
&\leq \delta + C\|u\|_{X^1(I)} \|u\|^2_{Z'(I)}
\end{aligned}
$$

De même

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_{Z'(I)} &\leq \|\Phi(0)\|_{Z'(I)} + \|\Phi(u) - \Phi(0)\|_{Z'(I)} \\ &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{Z'(I)} + \|u|u|^2\|_{N(I)} \\ &\leq \delta + C\|u\|_{X^1(I)}\|u\|^2_{Z'(I)} \\ &\leq \delta + CEa^2\end{aligned}$$

On choisit $a = 2\delta$ et δ_0 suffisamment petit Alors on a

On choisit $a = 2\delta$ et δ_0 suffisamment petit Alors on a

- Φ est une contraction stricte sur $\mathcal{S}$

On choisit $a = 2\delta$ et δ_0 suffisamment petit Alors on a

- Φ est une contraction stricte sur $\mathcal{S}$
- $\mathcal{S}$ est stable par Φ

On choisit $a = 2\delta$ et δ_0 suffisamment petit Alors on a

- Φ est une contraction stricte sur $\mathcal{S}$
- $\mathcal{S}$ est stable par Φ

Par point fixe le problème de Cauchy est localement bien posé sur $X^1(I)$.