



Université Pierre et Marie Curie
Master de Sciences & Technologies
M2 Mathématiques & Applications
Analyse Numérique & Équations aux Dérivées Partielles

Mémoire de M2
Sous la direction de

Ramona Anton

**L'inégalité de Strichartz pour l'équation de
Schrödinger sur une variété
semi-périodique :
le cas de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^d$**

Tarik Belmekki

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Cadre d'étude	2
1.2	Le cas euclidien	2
1.3	Le cas périodique	3
2	Espaces Fonctionnels	6
2.1	Théorie de Littlewood-Paley	6
2.2	Les espaces $U^p(\mathbb{R}, H)$ et $V^p(\mathbb{R}, H)$	8
3	Les estimations de Strichartz sur \mathbb{T}^d	11
4	Les estimations de Strichartz dans le cas semi-périodique	15
4.1	Introduction	15
4.2	Préliminaires	15
4.3	Résultat principal	16
5	Existence locale	30
6	Généralisation au cas $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^d$	35
7	Annexe	37

Chapitre 1

Introduction

1.1 Cadre d'étude

L'objet de ce mémoire est l'étude des inégalités de Strichartz dans le cadre semi-périodique et plus particulièrement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$, d'après le résultat obtenu par Ionescu-Pausader dans [10]. Ces inégalités (3.4) permettent de démontrer le théorème suivant

Théorème 1.1. *Si $u_0 \in H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$ alors il existe une unique solution globale $u \in X^1(\mathbb{R})$ de l'équation suivante*

$$(i\partial_t + \Delta)u = u|u|^2, \quad u(0) = u_0. \quad (1.1)$$

où l'espace $X^1(\mathbb{R})$ est défini dans (2.4).

1.2 Le cas euclidien

On dit qu'une équation aux dérivées partielles (EDP) est dispersive si elle propage des harmoniques différentes à des vitesses différentes. Or les estimations dispersives dites de Strichartz sont l'outil essentiel pour mesurer la taille et la dispersion des solutions d'une EDP.

On va s'intéresser dans ce mémoire à l'étude de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) qui est l'une des EDP dispersives les plus étudiées.

On considère l'équation NLS défocalisante avec une non linéarité cubique

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = u|u|^2 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où u est à valeurs complexes, $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$.

Si (q, r) est une paire admissible, i.e., $(q, r) \in (2, \infty) \times [2, \infty]$, $2/q = d/2 - d/r$,

alors on a les estimations de Strichartz homogènes qui permettent de contrôler la norme du flot linéaire¹

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim_q \|u_0\|_{L^2}. \quad (1.3)$$

1. On note $A \lesssim B$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que $A \leq cB$. De la même manière, on note $A \lesssim_q B$ s'il existe une constante $c(q) > 0$ telle que $A \leq c(q)B$.

Ces inégalités s'obtiennent grâce à l'argument TT* de Stein et à l'inégalité de Hardy-littlewood-Sobolev. Voir le théorème 7.2 de l'annexe pour une démonstration de ce résultat. Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage suivant [3] pour plus de détails.

En prenant $q = r$ on obtient

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^q(dt dx)} \lesssim_q \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}; \quad q = (2d+4)/d, \quad (1.4)$$

l'inégalité de Bernstein implique alors

$$\|P_N e^{it\Delta} u_0\|_{L_{t,x}^\infty} \lesssim N^{d/r} \|e^{it\Delta} u_0\|_{L_{t,x}^r}. \quad (1.5)$$

En prenant $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp } \hat{u}_0 \subset [-N, N]^d$ et pour $r = (2d+4)/d$ on a

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_{t,x}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim N^{d/2} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.6)$$

Il suffit à présent d'une interpolation entre (1.4) et (1.6) pour obtenir le résultat suivant

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_{t,x}^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim N^{d/2 - (d+2)/p} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}; \quad (2d+4)/d \leq p \leq \infty. \quad (1.7)$$

L'inégalité (1.4) a été obtenue par R. Strichartz en 1977 dans son article [13]. En 1985, J. Ginibre et G. Velo ont obtenu la généralisation (1.3). Ils ont également réussi à démontrer en utilisant un argument de point fixe que le problème NLS (1.2) était localement bien posé². Enfin, le cas limite $(q, r) = (2, 2d/d-2)$, $d \neq 2$, plus difficile, a été établi par M. Keel et T. Tao en 1998 dans [12].

Pour la partie non homogène, on note F le terme non linéaire. En pratique, F est traité comme une perturbation de la partie linéaire. Pour $(q, r), (\gamma, \rho)$ des paires admissibles, on a les inégalités de Strichartz inhomogènes

$$\left\| \int_{-\infty}^t e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim_{q,\gamma} \|F\|_{L_t^\gamma L_x^\rho} \quad (1.8)$$

Rappelons enfin, que pour des solutions suffisamment régulières, on a la conservation de la masse

$$M(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 dx = M(u_0), \quad (1.9)$$

et la conservation de l'énergie

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 dx + \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^3 dx = E(u_0). \quad (1.10)$$

1.3 Le cas périodique

Sur le tore \mathbb{T}^d , le flot linéaire de Schrödinger s'écrit

$$u(t, x) = e^{it\Delta} \varphi = (2\pi)^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} e^{i(n \cdot x + |n|^2 t)} \hat{\varphi}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n e^{i(n \cdot x + |n|^2 t)},$$

et on voit qu'il est plus délicat de contrôler cette somme en exponentielle. À ce jour, on ne dispose que de résultats partiels initiés par J. Bourgain, à qui on doit également le contre-exemple à l'inégalité (1.7) pour $d = 1$ et $p = 6$ [1, remark 2, p.118].

2. On dit qu'un problème de Cauchy est bien posé selon Hadamard si on a existence, unicité et dépendance continue d'une solution par rapport à la donnée initiale.

$$\left\| \sum_{n=1}^N e^{i(nx+n^2t)} \right\|_{L^6(\mathbb{T}^2)} \gtrsim (\log N)^{\frac{1}{6}} N^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

H. Takaoka et N. Tzvetkov ont donné en 2001 un contre-exemple de l'inégalité de Strichartz périodique en dimension 2. On pourra consulter [14] pour une preuve de ce résultat.

Il est intéressant de noter que A. Zygmund a démontré la première inégalité de Strichartz du type L^4-L^2 sur le tore en dimension 1 [17], dont voici l'énoncé, ainsi qu'une preuve basée sur la théorie des séries de Fourier.

Théorème 1.2. (Zygmund 74)[17]

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^4_{t,x}(\mathbb{T}^2)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Démonstration. Soit $f(t, x) = e^{it\Delta}\varphi(t, x) = (2\pi)^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^2t)} \hat{\varphi}(n)$, donc

$$\|f\bar{f}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} = \left\| (2\pi)^{-2} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n_1) \overline{\hat{\varphi}(n_2)} e^{i[(n_1-n_2)x+(n_1^2-n_2^2)t]} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

On pose alors $a(n, \tau) = (2\pi)^{-2} \sum_{(n_1, n_2) \in P(n, \tau)} \hat{\varphi}(n_1) \overline{\hat{\varphi}(n_2)}$, où $P(n, \tau) = \{(n_1, n_2) / n_1 - n_2 = n \text{ et } n_1^2 - n_2^2 = \tau\}$.

Remarquons ensuite que pour $(n, \tau) \neq (0, 0)$ et $(n, \tau) = (n_1 - n_2, n_1^2 - n_2^2)$, il existe au plus une solution (n_1, n_2) . En effet,

$$\tau - n^2 = n_1^2 - n_2^2 - (n_1 - n_2)^2 = -2n_2^2 + 2n_1n_2 = -2n_2n.$$

On obtient donc

$$n_2 = \frac{n^2 - \tau}{2n} \text{ et } n_1 = \frac{3n^2 - \tau}{2n}.$$

De plus, $a(0, 0) = (2\pi)^{-2} \sum_n |\hat{\varphi}(n)|^2$, car $n = 0 \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow \tau = n_1^2 - n_2^2 = 0$.

Ainsi, une simple application de Parseval nous donne :

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^4(\mathbb{T}^4)} &= \|f\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} = \|f\bar{f}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| (2\pi)^{-2} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n_1) \overline{\hat{\varphi}(n_2)} e^{i[(n_1-n_2)x+(n_1^2-n_2^2)t]} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| (2\pi)^{-2} \sum_{(n_1, n_2) \in P(n, \tau)} \hat{\varphi}(n_1) \overline{\hat{\varphi}(n_2)} e^{i(nx+\tau t)} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{n, \tau \in \mathbb{Z}} |a(n, \tau)|^2 \right)^{\frac{1}{4}} \leq \left(\sum_{(n, \tau) \neq (0, 0)} |a(n, \tau)|^2 \right)^{\frac{1}{4}} + |a(0, 0)|^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left(\sum_{n_1, n_2} |\hat{\varphi}(n_1) \overline{\hat{\varphi}(n_2)}|^2 \right)^{\frac{1}{4}} + (2\pi)^{-4} \left(\sum_n |\hat{\varphi}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left(\sum |\hat{\varphi}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Pour $d \geq 2$ on a besoin de compter le nombre d'éléments des réseaux de \mathbb{Z}^d . Se basant sur un résultat classique de la théorie des nombres, Bourgain obtient le résultat suivant

Théorème 1.3. (Bourgain 93)[1] $\forall d \geq 2, \forall \epsilon > 0$, pour tout φ telle que $\text{supp } \hat{\varphi} \subset B(0, N)$ on a

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^4_{t,x}(\mathbb{T}^{1+d})} \lesssim_{\epsilon} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}.$$

Démonstration. On a pour φ telle que $\text{supp } \hat{\varphi} \subset B(0, N)$

$$\begin{aligned} (e^{it\Delta}\varphi)^2 &= \left[\sum_{|n| \leq N} a_n e^{i(n \cdot x + |n|^2 t)} \right] \left[\sum_{|p| \leq N} a_p e^{i(p \cdot x + |p|^2 t)} \right] \\ &= \sum_{|n| \leq N} \sum_{|p| \leq N} a_n a_{p-n} e^{i(n \cdot x + |n|^2 t) + i((p-n) \cdot x + |p-n|^2 t)} \\ &= \sum_{|p| \leq N} e^{ip \cdot x} \left[\sum_{|n| \leq N} a_n a_{p-n} e^{i(|n|^2 + |p-n|^2 t)} \right] \\ &= \sum_{p; j} e^{i(p \cdot x + j t)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d; |n| \leq N; |n|^2 + |p-n|^2 = j} a_n a_{p-n}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $a_{p-n} = (2\pi)^{-d} \hat{\varphi}(p-n)$ et $\text{supp } \hat{\varphi} \subset B(0, N)$ donc $|p| \leq 2N$ et $|j| \leq 2N^2$ d'où

$$\|(e^{it\Delta}\varphi)^2\|_{L^2_{t,x}}^2 \leq \max_{|p| \leq 2N, |j| \leq 2N^2} (r_{p,j}) \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (|a_n|^2)^2,$$

où $r_{p,j} = \#\{n \in \mathbb{Z}^d \mid |n_i| \leq N; |n|^2 + |p-n|^2 = j; i \in \{1, \dots, d\}\}$.

Maintenant on écrit $|n|^2 + |p-n|^2 = j$ sous la forme d'une somme de d carrés

$$\sum_{i=1}^d (2n_i - p_i)^2 = 2j - |p|^2 = A,$$

et on utilise le résultat suivant de la théorie des nombres

$$r_{p,j} = \begin{cases} O(A^\epsilon) & \text{si } d = 2 \\ O(A^{\frac{1}{2}+\epsilon}) & \text{si } d = 3 \\ O(A^{1+\epsilon}) & \text{si } d = 4 \\ O(A^{\frac{d-4}{2}}) & \text{si } d \geq 5. \end{cases}$$

Or

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^4_{t,x}}^4 = \|(e^{it\Delta}\varphi)^2\|_{L^2_{t,x}}^2 \lesssim \max r_{p,j} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^4.$$

D'où le résultat en remarquant que $A \lesssim N^2$. □

Chapitre 2

Espaces Fonctionnels

2.1 Théorie de Littlewood-Paley

Dans cette section, on va poser quelques notations et rappeler des notions d'analyse de Fourier qui seront utiles tout au long de ce mémoire.

La localisation en fréquences est un outil fondamental en analyse. Pour cela, on va définir les opérateurs de Littlewood-Paley comme suit :

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction régulière et paire telle que $\phi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$ et $\phi(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 2$. Soit $\psi(\xi)$ la fonction définie par :

$$\psi(\xi) := \phi(\xi) - \phi(2\xi).$$

On définit les projecteurs de Littlewood-Paley $P_{\leq N}$ et P_N où $N = 2^j \geq 1$ est un nombre dyadique par

$$\widehat{P_{\leq N} f}(\xi) := \phi(\xi/N) \hat{f}(\xi), \quad \text{et} \quad \widehat{P_N f}(\xi) := \psi(\xi/N) \hat{f}(\xi).$$

En notant $\psi_N(\xi) = \psi(\xi/N)$, on peut écrire pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$:

$$\widehat{P_N f}(\xi) = \psi_N(\xi) \hat{f}(\xi),$$

et plus généralement, pour un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^d$ on a

$$\widehat{P_S f}(\xi) = \mathbf{1}_S(\xi) \hat{f}(\xi).$$

Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^d)$ via la norme :

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} := \left(\|P_{\leq 1} f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 + \sum_{N \geq 1} N^{2s} \|P_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2.1. $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_{2^k} f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration.

Pour m et l fixés dans \mathbb{Z} , on a

$$\sum_{-m \leq k \leq l} \widehat{P_{2^k} f}(\xi) = \sum_{-m \leq k \leq l} \left(\phi(\xi/2^k) - \phi(\xi/2^{k-1}) \right) \hat{f}(\xi) = \left(\phi(\xi/2^l) - \phi(\xi/2^{-m-1}) \right) \hat{f}(\xi).$$

Donc par application de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{d/2} \left\| f - \sum_{-m \leq k \leq l} P_{2^k} f \right\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} &= \left\| \hat{f} - \sum_{-m \leq k \leq l} \widehat{P_{2^k} f} \right\|_{L_\xi^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| \hat{f} - \left(\phi(\xi/2^l) - \phi(\xi/2^{-m-1}) \right) \hat{f} \right\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|\phi(2^{m+1} \cdot) \hat{f}\|_{L_\xi^2(\mathbb{R}^d)} + \|(1 - \phi(2^{-l} \cdot)) \hat{f}\|_{L_\xi^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\lesssim \left[\int_{\{|\xi| \leq 2^{-m}\}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{\{|\xi| \geq 2^l\}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad \text{dès que } m, l \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Donc par inégalité triangulaire, on a

$$0 \leq \left| \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_{2^k} f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right| \leq \left\| f - \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_{2^k} f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 0,$$

ce qui nous donne le résultat annoncé. □

Le théorème suivant est très utile dans l'analyse des EDP. Il nous dit que les projecteurs de Littlewood-Paley sont presque orthogonaux.

Théorème 2.2. *Les opérateurs P_{2^k} sont autoadjoints et $P_{2^{k_1}} \cdot P_{2^{k_2}} = 0$ dès que $|k_1 - k_2| \geq 2$. De plus, on a pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$*

$$\|f\|_{L^2}^2 \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_{2^k} f\|_{L^2}^2. \quad (2.1)$$

Démonstration. Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}
(P_{2^k} f, g)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= (2\pi)^{-d} \left(\widehat{P_{2^k} f}, \hat{g} \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{-d} \left(\widehat{P_{2^k} f}, \psi(2^{-k} \cdot) \hat{g} \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= (2\pi)^{-d} \left(\hat{f}, \widehat{P_{2^k} g} \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (f, P_{2^k} g)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre bien que les opérateurs P_{2^k} sont autoadjoints. D'autre part, $\psi(\xi/2^{k_1}) \cdot \psi(\xi/2^{k_2}) = 0$ dès que $|k_1 - k_2| \geq 2$, donc

$$\mathcal{F}_x(P_{2^{k_1}} P_{2^{k_2}} f)(\xi) = \psi(\xi/2^{k_1}) \cdot \psi(\xi/2^{k_2}) \hat{f}(\xi) = 0.$$

Ainsi $P_{2^{k_1}} P_{2^{k_2}} f = 0$ dès que $|k_1 - k_2| \geq 2$.

Montrons à présent (2.1). On a par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_{2^k} f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{k, j \in \mathbb{Z}} (P_{2^k} f, P_{2^j} f)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{|k-j| \leq 1} (P_{2^k} f, P_{2^j} f)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \sum_{|k-j| \leq 1} \|P_{2^k} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|P_{2^j} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 3 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_{2^k} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, comme $\psi(\xi/2^k) \neq 0$ sur la couronne $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_{2^k} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= (2\pi)^{-d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\widehat{P_{2^k} f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = (2\pi)^{-d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi/2^k) \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&\lesssim (2\pi)^{-d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\{2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \lesssim (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= (2\pi)^{-d} \|\hat{f}\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^d)}^2 = \|f\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)}^2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

2.2 Les espaces $U^p(\mathbb{R}, H)$ et $V^p(\mathbb{R}, H)$

Soit H un espace de Hilbert séparable. On note \mathcal{Z} l'ensemble des subdivisions de la droite réelle $-\infty < t_0 < t_1 < \dots < t_K \leq \infty$.

Définition 2.1. Soit $1 \leq p < \infty$. Pour $\{t_k\}_{k=0}^K \in \mathcal{Z}$ et $\{\phi_k\}_{k=0}^{K-1} \subset H$ avec $\sum_{k=0}^{K-1} \|\phi_k\|_H^p = 1$ et $\phi_0 = 0$, on appelle la fonction définie par morceaux $a : \mathbb{R} \rightarrow H$,

$$a = \sum_{k=1}^K \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k)} \phi_{k-1}$$

un U^p -atome et on définit l'espace des fonctions atomiques $U^p(\mathbb{R}, H)$ par

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \text{ pour des } U^p \text{ atomes } a_j, \{\lambda_j\} \in l^1,$$

avec la norme

$$\|u\|_{U^p} := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| : u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j, \lambda_j \in \mathbb{C}, a_j \text{ des } U^p \text{ atomes} \right\}.$$

Proposition 2.3. Soient $1 \leq p < q < \infty$

- i) U^p est un espace de Banach.
- ii) On a $U^p \hookrightarrow U^q \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}, H)$.

Démonstration.

i) Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $U^p(\mathbb{R}, H)$. On souhaite prouver la convergence de cette suite. Grâce à la structure de l'espace $U^p(\mathbb{R}, H)$, il suffit de raisonner sur les atomes. Soit donc $(a_n)_n$ une suite de Cauchy de U^p -atomes. Comme cette suite est à valeurs dans l'espace complet H , elle converge. D'où la complétude.

ii) La première injection est immédiate en remarquant que $l^p(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N})$. Démontrons la deuxième injection. Pour $u \in U^p(\mathbb{R}, H)$ on a grâce à l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\|u\|_H &\leq \sum_{j \geq 1} |\lambda_j| \cdot \|a_j\|_H \leq \sum_{j \geq 1} |\lambda_j| \cdot \sum_{k_j=1}^{K_j} \mathbf{1}_{[t_{k_j-1}, t_{k_j})}(t) \|\varphi_{k_j-1}^j\|_H \\
&\lesssim \sum_{j \geq 1} |\lambda_j| \left(\sum_{k_j=1}^{K_j} \|\varphi_{k_j-1}^j\|_H^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toutes les écritures de $u = \sum_{j \geq 1} \lambda_j a_j$ où les a_j sont des U^p -atomes. Donc

$$\|u\|_{L_t^\infty H} \lesssim \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| : u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j, \lambda_j \in \mathbb{C}, a_j \text{ des } U^p \text{ atomes} \right\} = \|u\|_{U^p(\mathbb{R}, H)}.$$

□

Définition 2.2. Soit $1 \leq p < \infty$.

- On note $V^p(\mathbb{R}, H)$ l'espace des fonctions $v : \mathbb{R} \rightarrow H$ telle que

$$\|v\|_{V^p} := \sup_{\{t_k\}_{k=0}^K \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{k=1}^K \|v(t_k) - v(t_{k-1})\|_H^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

est finie.

- De la même manière, soit $V_{rc}^p(\mathbb{R}, H)$ le sous-espace fermé de toutes les fonctions continues à droite $v : \mathbb{R} \rightarrow H$ telles que $\lim_{t \rightarrow -\infty} v(t) = 0$. On munira cet espace de la même norme (2.2).

Remarque 2.1. Les espaces $V^p(\mathbb{R}, H)$, $V_{rc}^p(\mathbb{R}, H)$ sont des espaces de Banach et on a les injections suivantes

$$U^p(\mathbb{R}, H) \hookrightarrow V_{rc}^p(\mathbb{R}, H) \hookrightarrow V^p(\mathbb{R}, H).$$

Énonçons à présent un résultat d'interpolation dû à Hadac-Herr-Koch [5, Lemme 2.20] qui sera utile lors de la démonstration de la partie existence du théorème 1.1.

Lemme 2.4. Soient $q_1, q_2, q_3 > 2$, E un espace de Banach et

$$T : U^{q_1} \times U^{q_2} \times U^{q_3} \rightarrow E$$

est une application trilinéaire continue avec $\|T(u_1, u_2, u_3)\|_E \leq C \prod_{j=1}^3 \|u_j\|_{U^{q_j}}$. On suppose également qu'il existe une constante $C_2 \in (0, C]$ telle que l'estimation $\|T(u_1, u_2, u_3)\|_E \leq C_2 \prod_{j=1}^3 \|u_j\|_{U^2}$ est satisfaite. Alors, T vérifie

$$\|T(u_1, u_2, u_3)\|_E \lesssim C_2 [\ln(C/C_2) + 1]^3 \prod_{j=1}^3 \|u_j\|_{V^2}, \quad u_j \in V_{rc}^2, \quad j = 1, 2, 3.$$

On va à présent définir une série d'espaces utiles dans la suite

Définition 2.3. Soit $s \in \mathbb{R}$. Soient $U_\Delta^p H^s$ resp. $V_\Delta^p H^s$ les espaces de toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \rightarrow H^s(\mathbb{T}^3)$ telles que $t \rightarrow e^{-it\Delta} u(t)$ est dans $U^p(\mathbb{R}, H^s)$ resp. $V^p(\mathbb{R}, H^s)$, munis des normes suivantes

$$\|u\|_{U_\Delta^p H^s} = \|e^{-it\Delta} u\|_{U^p(\mathbb{R}, H^s)}, \quad \|u\|_{V_\Delta^p H^s} = \|e^{-it\Delta} u\|_{V^p(\mathbb{R}, H^s)}. \quad (2.3)$$

Définition 2.4. Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace X^s comme l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R} \rightarrow H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$ telles que pour tout $\xi \in \mathbb{Z}^4$ la fonction $t \rightarrow P_{C_z} e^{it|\xi|^2} \widehat{u}(t)(\xi)$ est dans $U^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On munit cet espace de la norme suivante

$$\|u\|_{X^s} := \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^4} \langle \xi \rangle^{2s} \|P_{C_z} e^{it|\xi|^2} \widehat{u}(t)(\xi)\|_{U_t^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.4)$$

où $C_z = z + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^4$.

Définition 2.5. Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace Y^s comme l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R} \rightarrow H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$ telles que pour tout $\xi \in \mathbb{Z}^4$ la fonction $t \rightarrow P_{C_z} e^{it|\xi|^2} \widehat{u}(t)(\xi)$ est dans $V_{rc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On munit cet espace de la norme suivante

$$\|u\|_{Y^s} := \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^4} \langle \xi \rangle^{2s} \|P_{C_z} e^{it|\xi|^2} \widehat{u}(t)(\xi)\|_{V_t^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

La proposition suivante résume les différents liens existants entre les nouveaux espaces définis ci-dessus

Proposition 2.5. On a les injections continues suivantes

$$U_{\Delta}^2 H^s \hookrightarrow X^s \hookrightarrow Y^s \hookrightarrow V_{\Delta}^2 H^s.$$

Chapitre 3

Les estimations de Strichartz sur \mathbb{T}^d

Ce chapitre est consacré à l'étude des travaux de Herr-Tataru-Tzvetkov [7], où des inégalités de Strichartz trilineaires sur le tore \mathbb{T}^3 sont obtenues. Ces estimations généralisent les travaux de Bourgain et grâce à l'introduction de nouveaux espaces de fonctions, les auteurs démontrent que NLS quintique à donnée initiale petite est globalement bien posé dans $H^s(\mathbb{T}^3)$ pour tout $s \geq 1$. Notre objectif sera de comprendre ces travaux et d'essayer de les généraliser à la dimension d en suivant [16].

Dans toute la suite du chapitre, on notera $(d, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ toute paire satisfaisant aux conditions suivantes¹

$$\begin{aligned} d=1, \quad p > 6; \\ d=2,3, \quad p > 4; \\ d \geq 4, \quad p \geq \frac{2(d+4)}{d}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Soit N un nombre dyadique. On note

$$\mathcal{C}_N \text{ l'ensemble des cubes dont les arêtes sont de tailles } 2N. \tag{3.2}$$

On a alors le résultat de Bourgain suivant

Théorème 3.1 (Bourgain[1]). $\forall N \geq 1$ dyadique et pour toute paire (d, p) comme dans (3.1) on a

$$\|P_N e^{it\Delta} \varphi\|_{L^p_{t,x}(\mathbb{T}^{1+d})} \lesssim N^{\frac{d}{2} - \frac{d+2}{p}} \|P_N \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \tag{3.3}$$

et plus généralement, pour tout $C \in \mathcal{C}_N$

$$\|P_C e^{it\Delta} \varphi\|_{L^p_{t,x}(\mathbb{T}^{1+d})} \lesssim N^{\frac{d}{2} - \frac{d+2}{p}} \|P_C \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \tag{3.4}$$

Remarque 3.1. L'estimation (3.4) ne dépend pas de la position, mais seulement de la taille du support. En effet, Soit $C \in \mathcal{C}_N$ de centre ξ_0 . On pose $C_0 = C - \xi_0$ et $\hat{\varphi}_0(\xi) = \hat{\varphi}(\xi + \xi_0)$. Alors $\|P_C \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} = \|P_{C_0} \varphi_0\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}$. Et de plus;

$$P_{C_0} e^{it\Delta} \varphi_0(t, x) = (2\pi)^{-d} \sum_{\xi \in C_0} e^{i(x \cdot \xi - t|\xi|^2)} \hat{\varphi}_0(\xi) = (2\pi)^{-d} \sum_{\xi \in C} e^{i(x \cdot (\xi - \xi_0) - t|\xi - \xi_0|^2)} \hat{\varphi}_0(\xi),$$

1. Il est à noter que Killip-Visan [11] ont étendu en 2014 les estimations de Bourgain à toute paire telle que $d \geq 1$ et $p > \frac{2(d+2)}{d}$.

ensuite en remarquant que

$$x \cdot (\xi - \xi_0) - t|\xi - \xi_0|^2 = (x + 2t\xi_0) \cdot \xi - t|\xi|^2 - x \cdot \xi_0 - t|\xi_0|^2.$$

On obtient

$$P_{C_0} e^{it\Delta} \varphi_0(t, x) = e^{-i(x\xi_0 + t|\xi_0|^2)} P_C e^{it\Delta} \varphi(t, x + 2t\xi_0).$$

Donc

$$\|P_C e^{it\Delta} \varphi\|_{L^p(\mathbb{T}^{1+d})} = \|P_{C_0} e^{it\Delta} \varphi_0\|_{L^p(\mathbb{T}^{1+d})}.$$

Ce qui nous donne

$$\|P_{C_0} e^{it\Delta} \varphi_0\|_{L^p_{t,x}(\mathbb{T}^{1+d})} \lesssim N^{\frac{d}{2} - \frac{d+2}{p}} \|P_{C_0} \varphi_0\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}.$$

Maintenant on présente les estimations de Bourgain affinées obtenues par Herr-Tataru-Tzvetkov [7]

Soit $\mathcal{R}_M(N) = (\xi_0 + [-N, N]^d) \cap \{\xi \in \mathbb{Z}^d : |a \cdot \xi - A| \leq M\}$ où $\xi_0 \in \mathbb{Z}^d$, $a \in \mathbb{R}^d$, $|a| = 1$ et $A \in \mathbb{R}$.

Alors

Proposition 3.2. *Pour tous $1 \leq M \leq N$ et $R \in \mathcal{R}_M(N)$ on a*

$$\|P_R e^{it\Delta} \varphi\|_{L^\infty_{t,x}(\mathbb{T}^{1+d})} \lesssim M^{\frac{1}{2}} N^{\frac{d-1}{2}} \|P_R \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \quad (3.5)$$

Démonstration. On a

$$P_R e^{it\Delta} \varphi = (2\pi)^{-d} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d \cap R} e^{i(x \cdot \xi - |\xi|^2 t)} \hat{\varphi}(\xi).$$

donc, pour t fixé, en utilisant Cauchy-Schwarz, puis Parseval il vient

$$\begin{aligned} \|P_R e^{it\Delta} \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} &\lesssim \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d \cap R} |\hat{\varphi}(\xi)| \\ &\lesssim \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d \cap R} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d \cap R} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left(\#(\mathbb{Z}^d \cap R) \right)^{\frac{1}{2}} \|P_R \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \end{aligned}$$

il suffit à présent de majorer le terme $\#(\mathbb{Z}^d \cap R)$.

Or, on peut recouvrir chaque cube R par $\left(\frac{2N}{M}\right)^{d-1}$ cubes dont les arêtes sont de taille M (la puissance $d - 1$ provient du fait qu'un des côtés du rectangle R est de taille M). Par ailleurs, chaque cube contient M^d éléments du réseau \mathbb{Z}^d .

Ce qui nous donne

$$\#(\mathbb{Z}^d \cap R) \lesssim MN^{d-1},$$

d'où le résultat. □

Corollaire 3.3. Pour tous $1 \leq M \leq N$ et $R \in \mathcal{R}_M(N)$ on a

$$\|P_R e^{it\Delta} \varphi\|_{L_{t,x}^p(\mathbb{T}^{1+d})} \lesssim N^{\frac{d}{2} - \frac{d+2}{p}} \left(\frac{M}{N}\right)^\delta \|P_R \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \quad (3.6)$$

où (d, p) est une paire définie comme dans (3.1) et avec δ comme suit : pour $d = 1$, $0 < \delta < \frac{1}{2} - \frac{3}{p}$; pour $d = 2, 3$, $0 < \delta < \frac{1}{2} - \frac{2}{p}$; pour $d \geq 4$, $0 < \delta \leq \frac{1}{2} - \frac{d+4}{dp}$.

Démonstration.

On a d'après (3.4), pour p comme dans (3.1)

$$\|P_C e^{it\Delta} \varphi\|_{L_{t,x}^p(\mathbb{T} \times \mathbb{T}^d)} \lesssim N^{\frac{d}{2} - \frac{d+2}{p}} \|P_C \varphi\|_{L_x^2(\mathbb{T}^d)}$$

et d'après la proposition 3.2.

$$\|P_R e^{it\Delta} \varphi\|_{L_{t,x}^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{T}^d)} \lesssim M^{\frac{1}{2}} N^{\frac{d-1}{2}} \|P_R \varphi\|_{L_x^2(\mathbb{T}^d)}.$$

D'autre part, l'opérateur de Littlewood-Paley commute avec l'opérateur de Schrödinger linéaire, i.e. $P_R e^{it\Delta} \varphi = e^{it\Delta} P_R \varphi$. En effet,

$$P_R(e^{it\Delta} \varphi)(x) = (2\pi)^{-d} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d \cap R} e^{ix \cdot \xi} (\widehat{e^{it\Delta} \varphi})(\xi) = (2\pi)^{-d} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d \cap R} e^{ix \cdot \xi} e^{-it|\xi|^2} \widehat{\varphi}(\xi).$$

et

$$e^{it\Delta} P_R \varphi(x) = (2\pi)^{-d} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} e^{ix \cdot \xi} e^{-it|\xi|^2} \widehat{P_R \varphi}(\xi) = (2\pi)^{-d} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d \cap R} e^{ix \cdot \xi} e^{-it|\xi|^2} \widehat{\varphi}(\xi).$$

Par ailleurs, $P_C P_R = P_{C \cap R} = P_R$ car $R \subset C$. On en déduit alors que $P_R e^{it\Delta} \varphi = P_C P_R e^{it\Delta} \varphi = P_C e^{it\Delta} P_R \varphi$.

Par interpolation, et en utilisant ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \|P_R e^{it\Delta} \varphi\|_{L_{t,x}^p} &\leq \|P_R e^{it\Delta} \varphi\|_{L_{t,x}^\infty}^\theta \|P_R e^{it\Delta} \varphi\|_{L_{t,x}^{p_1}}^{1-\theta}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} \\ &\leq \|P_R e^{it\Delta} \varphi\|_{L_{t,x}^\infty}^\theta \|P_C e^{it\Delta} P_R \varphi\|_{L_{t,x}^{p_1}}^{1-\theta} \\ &\leq (M^{\frac{1}{2}} N^{\frac{d-1}{2}})^\theta \|P_R \varphi\|_{L_x^2}^\theta \|P_C e^{it\Delta} P_R \varphi\|_{L_{t,x}^{p_1}}^{1-\theta} \\ &\leq M^{\frac{\theta}{2}} N^{d\theta} N^{-\frac{\theta}{2}} \|P_R \varphi\|_{L_x^2}^\theta N^{(\frac{d}{2} - \frac{d+2}{p_1})(1-\theta)} \underbrace{\|P_R P_C \varphi\|_{L_x^2}^{1-\theta}}_{=P_R \varphi} \\ &\leq \left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{\theta}{2}} N^{d\theta} N^{\frac{d}{2}(1-\theta)} N^{\frac{d+2}{p_1}(1-\theta)} \|P_R \varphi\|_{L_x^2} \\ &\leq \left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{\theta}{2}} N^{\frac{d}{2} - \frac{d+2}{p}} \|P_R \varphi\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

On obtient donc l'inégalité (3.6) en posant $\delta = \frac{\theta}{2}$.

Il ne reste plus qu'à trouver les inégalités vérifiées par δ en fonction de la dimension d .

- Cas $d = 1$:
Afin de pouvoir appliquer l'inégalité (3.3), p_1 doit être strictement supérieur à 6 d'après (3.1), donc $p(1 - \theta) > 6$, ce qui implique que $0 < \delta = \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2} - \frac{3}{p}$.
- Cas $d = 2, 3$:
De la même manière, on a $p(1 - \theta) > 4$, ce qui donne $0 < \delta < \frac{1}{2} - \frac{2}{p}$.
- Cas $d \geq 4$
On a $p(1 - \theta) \geq \frac{2(d+4)}{d}$, donc $0 < \delta \leq \frac{1}{2} - \frac{d+4}{dp}$.

□

On conclut cette section avec des inégalités de Strichartz trilineaires

Théorème 3.4. *Il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq 1$ et pour tout intervalle $I \subset [0, 2\pi]$ on a*

$$\left\| \prod_{j=1}^3 P_{N_j} u_j \right\|_{L^2(I \times \mathbb{T}^3)} \lesssim N_2 N_3 \max \left\{ \frac{N_3}{N_2}, \frac{1}{N_2} \right\}^\delta \prod_{j=1}^3 \|P_{N_j} u_j\|_{Y^0}. \quad (3.7)$$

Chapitre 4

Les estimations de Strichartz dans le cas semi-périodique

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, on a vu que les inégalités de Strichartz sur des variétés compactes du type \mathbb{T}^d étaient moins bien comprises. En effet, contrairement au cas euclidien, l'inégalité de dispersion $L^1 \rightarrow L^\infty$ n'est plus satisfaite à cause des modes propres du Laplacien. En 2012, Ionescu-Pausader[10] ont montré que l'inégalité de dispersion sur \mathbb{R} combinée avec les estimations de Bourgain sur le tore \mathbb{T}^3 permettaient d'obtenir des inégalités de Strichartz sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$. Le but de cette section est de démontrer ce résultat.

4.2 Préliminaires

On définit la transformée de Fourier de f sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$ par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \text{ où } \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3)$ alors par inversion de Fourier on a

$$f(x) = (2\pi)^{-4} \sum_{(\xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{Z}^3} \int_{\xi_1 \in \mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi_1.$$

Pour $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$, on notera $\mathcal{F}f$ sa transformée de Fourier définie par

$$\mathcal{F}f(\tau, \xi) := \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) e^{-it\tau} e^{-ix \cdot \xi} dt dx,$$

et de la même manière, on a la formule d'inversion de Fourier suivante

$$f(t, x) = (2\pi)^{-5} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} \mathcal{F}f(\tau, \xi) e^{it\tau} e^{ix \cdot \xi} d\tau d\xi.$$

Pour plus de détails sur l'analyse de Fourier, le lecteur intéressé pourra consulter l'excellent ouvrage de Hörmander [?, chapitre 7].

On définit à présent les opérateurs de projection de Littlewood-Paley. Soit $\phi^1 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction régulière et paire telle que $\phi^1(\omega) = 1$ si $|\omega| \leq 1$ et $\phi^1(\omega) = 0$ si $|\omega| \geq 2$. Soit $\phi^4 : \mathbb{R}^4 \rightarrow [0, 1]$, $\phi^4(\omega) = \phi^1(\omega_1)^2 \phi^1(\omega_2)^2 \phi^1(\omega_3)^2 \phi^1(\omega_4)^2$.

On définit les projecteurs de Littlewood-Paley $P_{\leq N}$ et P_N où $N = 2^j \geq 1$ est un nombre dyadique par

$$\begin{aligned}\widehat{P_{\leq N}f}(\xi) &:= \phi^4(\xi/N) \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3, \\ \widehat{P_Nf}(\xi) &:= \psi^4(\xi/N) \hat{f}(\xi) = [\phi^4(\xi/N) - \phi^4(2\xi/N)] \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Enfin, on a la décomposition suivante

$$f = \sum_{j \geq 1} P_{2^j} f + P_{\leq 1} f.$$

4.3 Résultat principal

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat principal de Ionescu-Pausader.

Théorème 4.1. (Ionescu-Pausader 2012)[10] Soit $p_1 = \frac{18}{5}$. $\forall p > p_1, N \geq 1, \varphi \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$, on a

$$\|e^{it\Delta} P_N \varphi\|_{L^p_{t,x}([-1,1] \times (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3))} \lesssim_p N^{2-\frac{6}{p}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)}. \quad (4.1)$$

Remarque 4.1. Le théorème de Ionescu-Pausader est immédiat pour $p = \infty$. En effet

$$\|e^{it\Delta} \varphi\|_{L^\infty_{t,x}} \lesssim \|e^{-it|\xi|^2} \widehat{P_N \varphi}\|_{L^\infty_t L^1_\xi} \lesssim \|\widehat{P_N \varphi}\|_{L^1_\xi} \lesssim N^2 \|\hat{\varphi}\|_{L^2_\xi} \lesssim N^2 \|\varphi\|_{L^2_x}.$$

Donc par interpolation, il suffit de traiter le cas $p \in (18/5, 4)$.

Nous aurons besoin du lemme fondamental suivant

Lemme 4.2. Supposons que $p_0 > \frac{18}{5}, N \geq 1, \lambda \in J_{N,p_0} = [N^{(2p_0-6)/(p_0-2)}, 4N^2], \|m\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3)} \leq 1$ et $m(\xi) = 0$ pour $|\xi| > 2N$. Alors pour $I = [-2^{-10}, 2^{-10}]$ et en posant

$$S_\lambda = \left\{ (t, x) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 : \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} m(\xi) e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} d\xi \right| \geq \lambda \right\}, \quad (4.2)$$

on a

$$\text{mes}(S_\lambda) \lesssim N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0}. \quad (4.3)$$

Comme application du lemme 4.2, on a le

Corollaire 4.3. Soit $p > 18/5$. On note $F(t, x) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} m(\xi) d\xi$. Alors

$$\|\mathbf{1}_I(t) \cdot F\|_{L^p_{(t,x)}(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3))} \lesssim_p N^{2-\frac{6}{p}} \quad (4.4)$$

Démonstration du corollaire 4.3. On a par Cauchy-Schwarz

$$|F(t, x)| = \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} m(\xi) e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} d\xi \right| \leq \|m\|_{L^2_\xi} (\text{mes}(\text{supp } m))^{1/2} = \|m\|_{L^2_\xi} \cdot (2N)^2 \leq 4N^2.$$

On remarque donc que si $\lambda > 4N^2$ alors $\text{mes}(S_\lambda) = 0$. On prend donc $\lambda \leq 4N^2$. D'autre part

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{1}_I(t) \cdot F\|_{L_{(t,x)}^p(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3))}^p &= p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \text{mes}(S_\lambda) d\lambda \\
&= p \int_0^{N^{\frac{2p_0-6}{p_0-2}}} \lambda^{p-1} \text{mes}(S_\lambda) d\lambda + p \int_{N^{\frac{2p_0-6}{p_0-2}}}^{4N^2} \lambda^{p-1} \text{mes}(S_\lambda) d\lambda \\
&= \underbrace{p \int_0^{N^{\frac{2p_0-6}{p_0-2}}} \lambda^{p-1} \text{mes}(S_\lambda) d\lambda}_{=(1)} + \underbrace{p \int_{J_{N,p_0}} \lambda^{p-1} \text{mes}(S_\lambda) d\lambda}_{=(2)}.
\end{aligned}$$

Rappelons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\lambda^2 \text{mes}(S_\lambda) \leq \|\mathbf{1}_I(t) \cdot F\|_{L_{t,x}^2}^2.$$

Or

$$\|\mathbf{1}_I(t) \cdot F\|_{L_{t,x}^2}^2 \lesssim 1.$$

En effet, par Parseval

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{1}_I(t) \cdot F\|_{L_{t,x}^2}^2 &= (2\pi)^{-4} \|\mathbf{1}_I(t) \cdot \hat{F}\|_{L_{t,\xi}^2}^2 = (2\pi)^{-4} \|\mathbf{1}_I(t) \cdot (2\pi)^4 m(\xi) e^{-it|\xi|^2}\|_{L_{t,\xi}^2}^2 \\
&\leq (2\pi)^4 \text{mes}(I) \|m\|_{L_\xi^2}^2 \leq (2\pi)^4 \cdot \pi 2^{-2} \cdot 1 \leq 4\pi^3 \lesssim 1.
\end{aligned}$$

On obtient donc $\text{mes}(S_\lambda) \lesssim \lambda^{-2}$. Ainsi, on majore les termes (1) et (2) comme suit

Si $\lambda \in [0, N^{\frac{2p_0-6}{p_0-2}}]$, on a

$$(1) \lesssim p \int_0^{N^{\frac{2p_0-6}{p_0-2}}} \lambda^{p-1} \lambda^{-2} d\lambda \lesssim p \underbrace{\int_0^{N^{\frac{2p_0-6}{p_0-2}}} \lambda^{p-3} d\lambda}_{\text{intégrable en } \lambda \text{ car } p > 2} \lesssim \frac{p}{p-2} N^{\frac{2p_0-6}{p_0-2} \cdot (p-2)}.$$

Si $\lambda \in J_{N,p_0}$, on utilise la majoration (4.3) et on obtient

$$\begin{aligned}
(2) &\lesssim p \int_{J_{N,p_0}} \lambda^{p-1} N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0} d\lambda \lesssim \frac{p}{p-p_0} N^{2p_0-6} [\lambda^{p-p_0}]_{N^{\frac{2p_0-6}{p_0-2}}}^{4N^2} \\
&\lesssim \frac{p}{p-p_0} N^{2p_0-6} (4)^{p-p_0} N^{2(p-p_0)} \lesssim \frac{p}{p-p_0} (4)^{p-p_0} N^{2p-6}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\|\mathbf{1}_I(t) \cdot F\|_{L_{(t,x)}^p(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3))}^p \lesssim_p N^{2p-6}.$$

Ce qui conclut la preuve du corollaire. □

Proposition 4.4. *Le lemme 4.2 implique le théorème 4.1.*

Démonstration. Tout d'abord on a

$$e^{it\Delta} P_N \varphi(t, x) = (2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} \widehat{P_N \varphi}(\xi) d\xi.$$

Donc en posant $m(\xi) = \frac{\widehat{P_N \varphi}(\xi)}{\|\varphi\|_{L_x^2}}$, on voit que $m(\xi) = 0$ pour $|\xi| > 2N$ et par Parseval on a

$$\|m\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3)} = \frac{\|\widehat{P_N \varphi}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3)}}{\|\varphi\|_{L_x^2}} = (2\pi)^2 \frac{\|P_N \varphi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)}}{\|\varphi\|_{L_x^2}} \lesssim 1.$$

On note $F(t, x) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} m(\xi) d\xi$ et on a alors

$$e^{it\Delta} P_N \varphi = (2\pi)^{-4} \|\varphi\|_{L_x^2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} m(\xi) d\xi = (2\pi)^{-4} \|\varphi\|_{L_x^2} F(t, x).$$

En utilisant l'inégalité (4.4), on obtient

$$\|e^{it\Delta} P_N \varphi\|_{L_{t,x}^p(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)} \leq (2\pi)^{-4} \|\varphi\|_{L_x^2} \|\mathbf{1}(t) \cdot F\|_{L_{t,x}^p(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)} \lesssim (2\pi)^{-4} \|\varphi\|_{L_x^2} N^{2-\frac{6}{p}}.$$

□

Par ce qui précède, il suffit de prouver le lemme 4.2 pour obtenir notre résultat principal.

Démonstration du lemme 4.2.

Étape 1 : Application du principe TT^* et décomposition du noyau de Schrödinger K_N

On suppose que $N \gg 1$ et on définit le noyau $K_N : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} K_N(t, x) &= \phi^1(2^5 t / (2\pi)) \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} \phi^4(\xi / N) d\xi \\ &= \phi^1(2^5 t / (2\pi)) \prod_{j=2}^4 \left[\sum_{\xi_j \in \mathbb{Z}} e^{-it|\xi_j|^2} e^{ix_j \xi_j} \phi^1(\xi_j / N)^2 \right] \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-it|\xi_1|^2} e^{ix_1 \xi_1} \phi^1(\xi_1 / N)^2 d\xi_1, \end{aligned}$$

On va maintenant appliquer le principe TT^* (Voir l'annexe pour plus de détails sur cette méthode). Soit donc une fonction fixée $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$|f| \leq I_{S_\lambda},$$

et

$$\lambda \text{mes}(S_\lambda) \leq \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) \cdot \left[\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} m(\xi) e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} d\xi \right] dx dt \right|. \quad (4.5)$$

On rappelle que

$$S_\lambda = \left\{ (t, x) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 : \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} m(\xi) e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} d\xi \right| \geq \lambda \right\}.$$

On remarque que si $|f| \geq \mathbf{1}_{S_\lambda}$, l'inégalité (4.5) est toujours satisfaite.

Grâce au théorème de Fubini, suivi de l'inégalité de Cauchy-Schwarz en ξ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) \cdot \left[\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} m(\xi) e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} d\xi \right] dx dt \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} \prod_{j=1}^4 \phi^1(\xi_j/N) m(\xi) \cdot \left[\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} dx dt \right] d\xi \right| \\
&\leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} |m(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}}_{=\|m\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3)} \leq 1} \cdot \left(\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} \left| \prod_{j=1}^4 \phi^1(\xi_j/N) \left[\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} dx dt \right] \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\| \prod_{j=1}^4 \phi^1(\xi_j/N) \cdot \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} dx dt \right\|_{L^2_\xi}.
\end{aligned}$$

En élevant au carré puis en écrivant la norme L^2 sous la forme d'un produit scalaire, on déduit

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \text{mes}(S_\lambda)^2 &\leq \left\| \prod_{j=1}^4 \phi^1(\xi_j/N) \cdot \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} dx dt \right\|_{L^2_\xi}^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} \underbrace{\prod_{j=1}^4 (\phi^1(\xi_j/N))^2}_{=\phi^4(\xi/N)} \left[\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) \overline{f(s, y)} e^{-i(t-s)|\xi|^2} e^{i(x-y) \cdot \xi} dx dt dy ds \right] d\xi \\
&\leq \int_{(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)^2} f(t, x) \overline{f(s, y)} \left[\underbrace{\phi^1(2^5(t-s)/(2\pi)) \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} e^{-i|t-s|\xi^2} e^{i(x-y) \cdot \xi} \phi^4(\xi/N) d\xi}_{=K_N(t-s, x-y)} \right] dx dt dy ds.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'inégalité suivante

$$\lambda^2 \text{mes}(S_\lambda)^2 \leq \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) \overline{f(s, y)} K_N(t-s, x-y) dt dx ds dy. \quad (4.6)$$

Afin d'estimer le terme de droite de l'inégalité (4.6) on a besoin du lemme suivant dont une preuve est donnée à l'étape 3.

Lemme 4.5. Soient $\lambda \in J_{p_0, N}$ et $r \in [2, 4]$, alors on peut décomposer le noyau sous la forme

$$K_N = K_N^{1, \lambda} + K_N^{2, \lambda} + K_N^{3, \lambda}$$

tels que

$$\|K_N^{1, \lambda}\|_{L_{t,x}^\infty} \leq \lambda^2/2, \quad (4.7)$$

$$\|\mathcal{F} K_N^{2, \lambda}\|_{L_{t,\xi}^\infty} \lesssim \lambda^2 (N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0}), \quad (4.8)$$

$$\|\mathcal{F} K_N^{3, \lambda}\|_{L_{t,\xi}^r} \lesssim \lambda^2 (N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0})^{(r-1)/r}. \quad (4.9)$$

En appliquant le lemme 4.5., suivi de l'inégalité de Hölder, puis l'inégalité (4.6), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) \overline{f(s, y)} K_N(t-s, x-y) dt dx ds dy \\
&\leq \sum_{\mu \in \{1, 2, 3\}} \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) \overline{f(s, y)} K_N^{\mu, \lambda}(t-s, x-y) dt dx ds dy \right| = (I) + (II) + (III).
\end{aligned}$$

Étape 2 : Contrôle des termes (I), (II) et (III)

On va à présent majorer indépendamment les trois termes obtenus ci-dessus.

- terme (I) : On a par Hölder et par le lemme 4.5

$$\begin{aligned}
 (I) &\leq \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} \left| f(t, x) \overline{f(s, y)} K_N^{1, \lambda}(t-s, x-y) \right| dt dx ds dy \\
 &\leq \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} \mathbf{1}_{S_\lambda}(t, x) \overline{\mathbf{1}_{S_\lambda}(s, y)} \left| K_N^{1, \lambda}(t-s, x-y) \right| dt dx ds dy \\
 &\leq \|K_N^{1, \lambda}\|_{L_{t,x}^\infty} \text{mes}(S_\lambda)^2 \\
 &\leq \lambda^2 / 2 \text{mes}(S_\lambda)^2.
 \end{aligned}$$

- terme (II) : On a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
 (II) &= \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) \overline{f(s, y)} K_N^{2, \lambda}(t-s, x-y) dt dx ds dy \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) \cdot [\bar{f} * K_N^{2, \lambda}](t, x) dt dx \right| \leq \|\bar{f} * K_N^{2, \lambda}\|_{L_{t,x}^2} \cdot \|f\|_{L_{t,x}^2} \\
 &\leq (2\pi)^{-5/2} \|\mathcal{F}(K_N^{2, \lambda} * \bar{f})\|_{L_{\tau,\xi}^2} \cdot \|f\|_{L_{t,x}^2} = (2\pi)^{-5/2} \|\mathcal{F}K_N^{2, \lambda} \cdot \mathcal{F}\bar{f}\|_{L_{\tau,\xi}^2} \cdot \|f\|_{L_{t,x}^2} \\
 &\leq \|\mathcal{F}K_N^{2, \lambda}\|_{L_{\tau,\xi}^\infty} \|f\|_{L_{t,x}^2}^2 \lesssim \lambda^2 (N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0}) \text{mes}(S_\lambda).
 \end{aligned}$$

- terme (III) : On a grâce à Cauchy-Schwarz, suivi de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
 (III) &= \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) \overline{f(s, y)} K_N^{3, \lambda}(t-s, x-y) dt dx ds dy \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3} f(t, x) \cdot [\bar{f} * K_N^{3, \lambda}](t, x) dt dx \right| \leq \|\bar{f} * K_N^{3, \lambda}\|_{L_{t,x}^2} \cdot \|f\|_{L_{t,x}^2} \\
 &\leq (2\pi)^{-5/2} \|\mathcal{F}(K_N^{3, \lambda} * \bar{f})\|_{L_{\tau,\xi}^2} \cdot \|f\|_{L_{t,x}^2} = (2\pi)^{-5/2} \|\mathcal{F}K_N^{3, \lambda} \cdot \mathcal{F}\bar{f}\|_{L_{\tau,\xi}^2} \cdot \|f\|_{L_{t,x}^2} \\
 &\lesssim \|\mathcal{F}K_N^{3, \lambda}\|_{L_{\tau,\xi}^r} \cdot \|\mathcal{F}\bar{f}\|_{L_{\tau,\xi}^q} \cdot \|f\|_{L_{t,x}^2}; \quad 1/2 = 1/r + 1/q
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, grâce au théorème de Hausdorff-Young, on a :

Si $\bar{f} \in L^{q'}$ et $1 \leq q' \leq \infty$, alors $\mathcal{F}\bar{f} \in L^q$, $1/q + 1/q' = 1$, et

$$\|\mathcal{F}\bar{f}\|_{L_{\tau,\xi}^q} \leq (2\pi)^{5/q} \|\bar{f}\|_{L_{t,x}^{q'}}.$$

Ainsi un calcul simple nous donne $r \in [2, 4]$ et

$$\begin{aligned}
 (III) &\lesssim \|\mathcal{F}K_N^{3, \lambda}\|_{L_{\tau,\xi}^r} \cdot \|\bar{f}\|_{L_{t,x}^{2r/(r+2)}} \cdot \|f\|_{L_{t,x}^2} \lesssim \lambda^2 (N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0})^{(r-1)/r} \cdot \|\mathbf{1}_{S_\lambda}\|_{L_{t,x}^{2r/(r+2)}} \cdot \|\mathbf{1}_{S_\lambda}\|_{L_{t,x}^2} \\
 &\lesssim \lambda^2 (N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0})^{(r-1)/r} \text{mes}(S_\lambda)^{(r+2)/2r} \text{mes}(S_\lambda)^{1/2} \lesssim \lambda^2 (N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0})^{(r-1)/r} \text{mes}(S_\lambda)^{(r+1)/r}.
 \end{aligned}$$

En sommant les estimations des termes (I), (II) et (III), on a d'après l'inégalité (4.6)

$$\lambda^2 \text{mes}(S_\lambda)^2 \lesssim \frac{\lambda^2}{2} \text{mes}(S_\lambda)^2 + \lambda^2 N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0} \text{mes}(S_\lambda) + \lambda^2 (N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0})^{\frac{r-1}{r}} \text{mes}(S_\lambda)^{\frac{r+1}{r}}.$$

Ce qui nous donne après simplification

$$\text{mes}(S_\lambda) \lesssim (N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0}) + (N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0})^{(r-1)/r} \text{mes}(S_\lambda)^{1/r}.$$

Il est important de remarquer que le terme (I) est absorbé.

On pose $\alpha = N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0}$ et $X = \frac{\text{mes}(S_\lambda)}{\alpha}$. Ainsi

$$\text{mes}(S_\lambda) \lesssim \alpha + \alpha^{1-1/r} \text{mes}(S_\lambda)^{1/r},$$

donc

$$\frac{\text{mes}(S_\lambda)}{\alpha} \lesssim 1 + \left[\frac{\text{mes}(S_\lambda)}{\alpha} \right]^{1/r},$$

i.e,

$$X \lesssim 1 + X^{1/r}.$$

L'étude de la fonction $g(X) = X - 1 - X^{1/r}$ nous donne le résultat souhaité, en notant que $r \in [2, 4]$.

Étape 3 : Preuve du lemme 4.5.

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour tout $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3$, on a grâce à la définition de K_N

$$\mathcal{F}[K_N(t, x) \cdot h(t)](\tau, \xi) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3} e^{-ix \cdot \xi} e^{-it\tau} K_N(t, x) \cdot h(t) dx dt \quad (4.10)$$

$$= C \phi^4(\xi/N) \int_{\mathbb{R}} h(t) \phi^1(2^5 t/(2\pi)) e^{-it\tau} e^{-it|\xi|^2} dt. \quad (4.11)$$

Ensuite on rappelle l'estimation fondamentale obtenue par Bourgain [1, Lemme.3.18] sur le tore \mathbb{T}^d :

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} e^{-it|n|^2} e^{ix \cdot n} \phi^1(n/N)^2 \right| \lesssim \left[\frac{N}{\sqrt{q}(1 + N|t/(2\pi) - a/q|^{1/2})} \right]^d, \quad (4.12)$$

pour

$$t/(2\pi) = a/q + \beta, \quad q \in \{1, \dots, N\}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad (a, q) = 1, \quad |\beta| \leq (Nq)^{-1}. \quad (4.13)$$

Ce qui nous donne dans notre cas particulier

$$|K_N(t, x)| \lesssim \frac{N^3}{q^{3/2}(1 + N|t/(2\pi) - a/q|^{1/2})^3} \cdot \frac{N}{1 + N|t/(2\pi)|^{1/2}}. \quad (4.14)$$

Remarque 4.2. Dans le cas euclidien on a l'inégalité suivante

$$\|P_N e^{it\Delta} \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim \left[\frac{N}{1 + N|t/(2\pi)|^{\frac{1}{2}}} \right]^d \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Sur le tore \mathbb{T}^d , cette inégalité de dispersion n'est plus valide. D'autre part, on ne peut pas appliquer l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev (7.2) sur le terme suivant

$$\frac{N^3}{q^{\frac{3}{2}}(1 + N|t/(2\pi) - a/q|^{\frac{1}{2}})^3} \quad (4.15)$$

La méthode adoptée par Ionescu-Pausader est de décomposer sur de petites échelles afin d'estimer l'apport de chaque composante de (4.15).

On introduit dans la suite une partition de l'unité en temps afin d'exploiter la bonne norme L^∞ du noyau de Schrödinger sur chaque petit intervalle de temps. Il est à noter que j mesure le gain que l'on obtient et k mesure la taille du dénominateur.

Pour $m \in \mathbb{Z}$, on définit $\phi_m, \phi_{m \geq 0} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$\phi_m(s) := \phi^1(2^m s) - \phi^1(2^{m+1} s), \quad \phi_{\geq m}(s) := \phi^1(2^m s) = \sum_{k \geq m} \phi_k(s).$$

Il est immédiat que $\phi_{\geq m}$ est à support dans l'intervalle $[-2^{1-m}, 2^{1-m}]$. Quant à la fonction ϕ_m , elle est à support dans l'ensemble $\{s \in \mathbb{R} : |s| \in [2^{-m-1}, 2^{1-m}]\}$.

Soient des entiers K et L fixés tels que

$$K \in \mathbb{Z}_+, \quad N \in [2^{K+4}, 2^{K+5}), \quad L \in \mathbb{Z} \cap [0, 2K + 20], \quad \lambda^{p_0-2} N^{6-2p_0} \in [2^L, 2^{L+1}). \quad (4.16)$$

On pose

$$\begin{aligned} 1 &= \left[\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-k} p_{k,j}(s) \right] + e(s) = \left[\sum_{(k,j) \in T_K} p_{k,j}(s) \right] + e(s), \\ p_{k,j}(s) &:= \sum_{q=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} \phi_{j+K+k+10}(s/(2\pi) - a/q) \quad \text{si } j \leq K-k-1, \\ p_{k,K-k}(s) &:= \sum_{q=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} \phi_{\geq 2K+10}(s/(2\pi) - a/q). \end{aligned}$$

On pose $T_K = \{(k, j) \in \{0, \dots, K-1\} \times \{0, \dots, K\} : k+j \leq K\}$. Grâce au lemme de Dirichlet, on a

Lemme 4.6. si $t \in \text{supp}(e)$ satisfait (4.13) alors $N \lesssim q$ ou $(Nq)^{-1} \approx |t/(2\pi) - a/q|$.

Démonstration.

Tout d'abord on montre que les arcs majeurs sont à supports disjoints. En effet, on a

$$\phi_{K+k+j+10}(t/(2\pi) - a/q) \cdot \phi_{K+k'+j'+10}(t/(2\pi) - a'/q') \neq 0 \Rightarrow k = k', (a, q) = (a', q'), |j - j'| \leq 1$$

Supposons que $a/q \neq a'/q'$ et prenons $a/q < a'/q'$ par exemple.

On aimerait avoir $a/q + 2^{-K-k-9} < a'/q' - 2^{-K-k'-9}$, i.e. $2^{-K-k-9} + 2^{-K-k'-9} < a/q + a'/q'$. Or

$$2^{-k-k'-2} \leq |a/q - a'/q'| \leq |t/(2\pi) - a/q| + |t/(2\pi) - a'/q'|.$$

Donc il suffit de montrer que $2^{-K-k-9} + 2^{-K-k'-9} < 2^{-k-k'-2}$.

Un calcul direct mène à l'inégalité suivante $1 < 2^6 2^{K-\max(k,k')}$.

D'autre part grâce au lemme de Dirichlet et on prenant $t \in \text{supp}(e)$, on voit que

Soit $|t/(2\pi) - a/q| \geq 2^{-K-k-10} \approx (Nq)^{-1}$, soit $q \in [2^K, N]$, i.e. $q \approx N$. □

D'après le lemme précédent, on doit distinguer deux cas :

- Cas $q \geq N$

$$\frac{N^3}{q^{\frac{3}{2}} [1 + N|t/2\pi - a/q|^{\frac{1}{2}}]^3} \leq \frac{(2^{K+5})^3}{q^{\frac{3}{2}} [1 + (\frac{N}{q})^{\frac{1}{2}}]^3} \leq \frac{(2^{K+5})^3}{q^{\frac{3}{2}} (\frac{N}{q})^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{(2^{K+5})^3}{(2^{K+4})^{\frac{3}{2}}} \lesssim 2^{3K/2},$$

d'autre part

$$\phi_l(t/(2\pi)) \cdot \frac{N}{1 + N|t/(2\pi)|^{\frac{1}{2}}} \leq 2^{(l+1)/2} \lesssim 2^{l/2}.$$

ce qui implique

$$|K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) \cdot e(t)| \lesssim 2^{l/2} 2^{3K/2}.$$

- Cas $|t/(2\pi) - a/q| \approx 1/(Nq)$.

On a

$$\frac{N^3}{q^{\frac{3}{2}} [1 + N|t/2\pi - a/q|^{\frac{1}{2}}]^3} \leq \frac{N^3}{q^{\frac{3}{2}} (\frac{N}{q})^{\frac{3}{2}}} \leq N^{3/2} \leq N^{(K+5)3/2} \lesssim 2^{3K/2},$$

Au final, dans les deux cas on obtient

$$|K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) \cdot e(t)| \lesssim 2^{l/2} 2^{3K/2}. \quad (4.17)$$

Par ailleurs, pour tout $(k, j) \in T_K$, on a

$$\phi_{K+k+j+10}(t/(2\pi) - a/q) \cdot \frac{N^3}{q^{\frac{3}{2}} [1 + N|t/2\pi - a/q|^{\frac{1}{2}}]^3} \leq \frac{(2^{K+5})^3}{2^{3k/2} [2^{K+4} (2^{-j-K-k-9})^{\frac{1}{2}}]^3} \lesssim 2^{3K/2} 2^{3j/2},$$

et grâce à

$$\phi_l(t/(2\pi)) \cdot \frac{N}{1 + N|t/(2\pi)|^{\frac{1}{2}}} \lesssim 2^{l/2},$$

on trouve

$$|K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) \cdot p_{k,j}(t)| \lesssim 2^{l/2} 2^{3K/2} 2^{3j/2}. \quad (4.18)$$

On définit à présent la première composante du noyau $K_N^{2,\lambda}$, notée $K_{N,1}^{2,\lambda}$

$$K_{N,1}^{2,\lambda}(t, x) := K_N(t, x) \cdot \phi^1(2^{L-40}t/(2\pi)). \quad (4.19)$$

Donc, grâce à (4.11), on a

$$\mathcal{F}(K_{N,1}^{2,\lambda})(\tau, \xi) = C\phi^4(\xi/N) \int_{\mathbb{R}} \phi^1(2^{L-40}t/(2\pi)) \phi^1(2^5t/(2\pi)) e^{-it\tau} e^{-it|\xi|^2} dt.$$

Par conséquent, en observant que $\phi^1(2^{L-40}t/(2\pi))$ est à support dans $[-\pi 2^{-L+42}, \pi 2^{-L+42}]$ et que $\phi^1(2^5t/(2\pi))$ est à support dans $[-\pi 2^{-3}, \pi 2^{-3}]$, on a

$$\mathcal{F}(K_{N,1}^{2,\lambda})(\tau, \xi) = C\phi^4(\xi/N) \int_{[-\pi 2^{-L+42}, \pi 2^{-L+42}] \cap [-\pi 2^{-3}, \pi 2^{-3}]} \phi^1(2^{L-40}t/(2\pi)) \phi^1(2^5t/(2\pi)) e^{-it\tau} e^{-it|\xi|^2} dt.$$

Or, $[-\pi 2^{-L+42}, \pi 2^{-L+42}] \cap [-\pi 2^{-3}, \pi 2^{-3}] = [-\pi 2^{-L+42}, \pi 2^{-L+42}]$, pour $L \geq 45$.

Ainsi, à t et ξ fixés, on a

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}(K_{N,1}^{2,\lambda})(\tau, \xi) \right| &\leq C\phi^4(\xi/N) \int_{[-\pi 2^{-L+42}, \pi 2^{-L+42}]} dt \\ &\leq C\pi 2 \cdot 2^{-L+42} \lesssim 2^{-L}, \end{aligned}$$

ce qui implique la majoration suivante

$$\|\mathcal{F}K_{N,1}^{2,\lambda}\|_{L_{\tau,\xi}^\infty} \lesssim 2^{-L},$$

et en utilisant (4.16), on obtient

$$\|\mathcal{F}K_{N,1}^{2,\lambda}\|_{L_{\tau,\xi}^\infty} \lesssim \lambda^2 N^{2p_0-6} \lambda^{-p_0}.$$

On écrit

$$\begin{aligned} K_N(t, x) - K_{N,1}^{2,\lambda}(t, x) &= \sum_{l=4}^{L-41} K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) \\ &= K_N(t, x) [\phi^1(2^4t/(2\pi)) - \phi^1(2^{L-40}t/(2\pi))]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) &= K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) \cdot 1 \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-k} K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) p_{k,j}(t) + K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) \cdot e(t). \end{aligned}$$

On a d'après (4.16) $2^L \leq \lambda^{p_0-2} N^{6-2p_0} < 2^{L+1}$, donc $2^{2L/(p_0-2)} \leq \lambda^2 N^{2(6-2p_0)/(p_0-2)} < 2^{2(L+1)/(p_0-2)}$,

ainsi

$$2^{2L/(p_0-2)} N^{(4p_0-12)/(p_0-2)} \leq \lambda^2 < 2^{2(L+1)/(p_0-2)} N^{(4p_0-12)/(p_0-2)}.$$

D'autre part, $2^{K+4} \leq N < 2^{K+5}$, donc

$$2^{2L/(p_0-2)} 2^{(K+4)(4p_0-12)/(p_0-2)} \leq \lambda^2 < 2^{2(L+1)/(p_0-2)} 2^{(K+5)(4p_0-12)/(p_0-2)}.$$

Par conséquent,

$$\lambda^2 \approx 2^{2L/(p_0-2)} 2^{K(4p_0-12)/(p_0-2)}. \quad (4.20)$$

On obtient donc

$$|K_N(t, x) - K_{N,1}^{2,\lambda}(t, x)| \lesssim 2^{L/2} 2^{3K/2} 2^{3j/2} + 2^{L/2} 2^{3K/2}.$$

On souhaite à présent obtenir la majoration suivante $2^{L/2} 2^{3K/2} \lesssim \lambda^2$. Pour cela, on utilise la relation (4.20), ce qui nous donne

$$2^{L/2} 2^{3K/2} \leq 2^{2L/(p_0-2)} 2^{K(4p_0-12)/(p_0-2)},$$

car $2^{L/2} \leq 2^{(L-41)/2} \leq 2^{L/2} \leq 2^{L/(p_0-2)}$, où on a utilisé le fait que $p_0 < 4$. Donc $3K/2 \leq K(4p_0 - 12)/(p_0 - 2)$.

On obtient ainsi la condition nécessaire du lemme (4.2), à savoir

$$P_0 \geq 18/5. \quad (4.21)$$

On va dans la suite analyser deux cas :

- Cas 1 : $L \leq 2K - \delta K$, $\delta = 1/100$

$$K_N^{1,\lambda}(t, x) := K_N(t, x) \cdot \left[\sum_{l=4}^{L-41} \phi_l(t/(2\pi)) [e(t) + \sum_{(k,j) \in T_K, 2j \leq L} p_{k,j}(t) + \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} \rho_{k,j} p_{k,0}(t)] \right], \quad (4.22)$$

$$K_N^{2,\lambda}(t, x) := K_{N,1}^{2,\lambda}(t, x) + K_N(t, x) \cdot \left[\sum_{l=4}^{L-41} \phi_l(t/(2\pi)) \left[\sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} (p_{k,j}(t) - \rho_{k,j} p_{k,0}(t)) \right] \right], \quad (4.23)$$

$$K_N^{3,\lambda}(t, x) := 0, \quad (4.24)$$

où $K_{N,1}^{2,\lambda}$ a été défini dans (4.19) et

$$\rho_{k,j} := 2^{-j} \quad \text{si} \quad j \leq K - k - 1 \quad \text{et} \quad \rho_{k,K-k} := 2^{-K+k+1}. \quad (4.25)$$

Les coefficients $\rho_{k,j}$ sont choisis uniquement dans le but d'effectuer des simplifications.

Montrons que $K_N = K_N^{1,\lambda} + K_N^{2,\lambda} + K_N^{3,\lambda}$. En effet, on a

$$K_N(t, x) - K_N^{2,\lambda}(t, x) - K_N^{3,\lambda}(t, x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=4}^{L-41} K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) - K_N(t, x) \cdot \left[\sum_{l=4}^{L-41} \phi_l(t/(2\pi)) \left[\sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} (p_{k,j}(t) - \rho_{k,j} p_{k,0}(t)) \right] \right] \\
&= K_N(t, x) \cdot \left[\sum_{l=4}^{L-41} \phi_l(t/(2\pi)) \left[1 - \underbrace{\sum_{(k,j) \in T_K, 2j \leq L} p_{k,j}(t) - \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} p_{k,j}(t)}_{=e(t)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{(k,j) \in T_K, 2j \leq L} p_{k,j}(t) + \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} \rho_{k,j} p_{k,0}(t) \right] \\
&= K_N(t, x) \cdot \left[\sum_{l=4}^{L-41} \phi_l(t/(2\pi)) \left[e(t) + \sum_{(k,j) \in T_K, 2j \leq L} p_{k,j}(t) + \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} \rho_{k,j} p_{k,0}(t) \right] \right] \\
&= K_N^{1,\lambda}(t, x).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne bien la décomposition souhaitée. Par ailleurs, ayant choisi $K_N^{3,\lambda}$ identiquement nulle, on a immédiatement la majoration (4.9).

En ce qui concerne la majoration (4.7), on a grâce à l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
|K_N^{1,\lambda}(t, x)| &\leq \sum_{l=4}^{L-41} |K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) e(t)| \quad \rightarrow (*) \\
&\quad + \sum_{l=4}^{L-41} \sum_{(k,j) \in T_K, 2j \leq L} |K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) p_{k,j}(t)| \quad \rightarrow (**) \\
&\quad + \sum_{l=4}^{L-41} \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} |K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) \rho_{k,j} p_{k,0}(t)| \quad \rightarrow (***)
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède (*) $\lesssim 2^{L/2} 2^{3K/2}$. D'autre part

$$\begin{aligned}
(**) &\lesssim \sum_{l=4}^{L-41} \sum_{(k,j) \in T_K, 2j \leq L} 2^{l/2} 2^{3K/2} 2^{3j/2} \lesssim 2^{L/2} \underbrace{(K-k)}_{\leq K} 2^{3K/2} \sum_{j=0}^{K-k} 2^{3j/2} \mathbf{1}_{\{j \leq L/2\}} \\
&\lesssim K 2^{L/2} 2^{3K/2} \sum_{j=0}^{\alpha} 2^{3j/2} \quad \text{où} \quad \alpha = \min((K-k), L/2) \\
&\lesssim K 2^{L/2} 2^{3K/2} \frac{2^{3\alpha/2+1} - 1}{2^{3/2} - 1} \lesssim K 2^{L/2} 2^{3K/2} 2^{3L/4}.
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme, on a

$$\begin{aligned}
(***) &\lesssim \sum_{l=4}^{L-41} \sum_{q=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} \frac{N^3 \cdot \phi_{K+k+10}(t/(2\pi) - a/q)}{q^{3/2} \left[1 + N|t/(2\pi) - a/q|^{1/2} \right]^3} \cdot \frac{N \cdot \phi_l(t/(2\pi))}{1 + N|t/(2\pi)|^{1/2}} \cdot 2^{-j} \mathbf{1}_{\{2j > L\}} \\
&\lesssim \sum_{l=4}^{L-41} \sum_{q=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} \frac{2^{3(K+5)} 2^{-j} 2^{l/2}}{2^{3k/2} \left[2^{K+4} (2^{-K-k-10})^{1/2} \right]^3} \cdot \mathbf{1}_{\{j > L/2\}} \lesssim K 2^{L/2} 2^{3K/2} \\
&\lesssim 2^{2L/(p_0-2)} 2^{K(4p_0-12)/(p_0-2)} \cdot K 2^{(L-2K)(5p_0-18)/(4p_0-8)}.
\end{aligned}$$

Or $L - 2K \leq K/100$, $N \gg 1$, $p_0 > 18/5$ et $\lambda^2 \approx 2^{2L/(p_0-2)} 2^{4(p_0-12)/(p_0-2)}$

on obtient donc

$$|K_N^{1,\lambda}(t, x)| \lesssim K/2^{K/640} \cdot \lambda^2 \lesssim \lambda^2/2,$$

d'où (4.7).

On veut prouver maintenant l'inégalité (4.8). Pour cela, on utilise la relation (4.23) ainsi que (4.11), ce qui nous donne grâce à la linéarité de la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(K_N^{2,\lambda})(\tau, \xi) = \mathcal{F}(K_{N,1}^{2,\lambda})(\tau, \xi) + \mathcal{F}[K_N(t, x) \cdot h(t)](\tau, \xi),$$

$$\text{où } h(t) = \sum_{l=4}^{L-41} \phi_l(t/(2\pi)) \left[\sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} (p_{k,j}(t) - \rho_{k,j} p_{k,0}(t)) \right].$$

Dans la suite, on pose $\tilde{\phi}_L(s) := \sum_{l=4}^{L-41} \phi^1(2^l s) - \phi^1(2^{L-40} s)$.

Grâce au changement de variable $t/(2\pi) \rightarrow t$ et en posant $b = 2\pi(\tau + |\xi|^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(K_N^{2,\lambda})(\tau, \xi) - \mathcal{F}(K_{N,1}^{2,\lambda})(\tau, \xi) &= C\phi^4(\xi/N) \int_{\mathbb{R}} h(t) \phi^1(t/(2\pi)) e^{-it\tau} e^{-it|\xi|^2} dt \\ &= C\phi^4(\xi/N) \int_{\mathbb{R}} \sum_{l=4}^{L-41} \phi_l(t/(2\pi)) \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} (p_{k,j} - \rho_{k,j} p_{k,0})(t) \phi^1(2^5 t/(2\pi)) e^{-it(\tau + |\xi|^2)} dt \\ &= C\phi^4(\xi/N) \int_{\mathbb{R}} \sum_{l=4}^{L-41} \phi_l(t) \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} (p_{k,j} - \rho_{k,j} p_{k,0})(2\pi t) \phi^1(2^5 t) e^{-itb} dt \\ &= C\phi^4(\xi/N) \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}_L(t) \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} (p_{k,j} - \rho_{k,j} p_{k,0})(2\pi t) \phi^1(2^5 t) e^{-itb} dt. \end{aligned}$$

On a donc

$$|\mathcal{F}K_N^{2,\lambda}| \lesssim \underbrace{|\mathcal{F}K_{N,1}^{2,\lambda}|}_{\lesssim 2^{-L}} + \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} \int_{\mathbb{R}} \left| \tilde{\phi}_L(t) (P_{k,j} - \rho_{k,j} p_{k,0})(2\pi t) \phi^1(2^5 t) e^{-itb} \right| dt.$$

Il suffit donc de prouver que pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité suivante

$$\sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} \int_{\mathbb{R}} \left| \tilde{\phi}_L(t) (P_{k,j} - \rho_{k,j} p_{k,0})(2\pi t) \phi^1(2^5 t) e^{-itb} \right| dt \lesssim 2^{-L}. \quad (4.26)$$

Étape 4 : Application de la méthode du cercle

On pose $Z_q := \{0, \dots, q-1\}$ et on considère le

Lemme 4.7. Soient $\gamma > 0, Q, M \in \mathbb{Z}_+^*$, $M \geq 8Q, S \subseteq \{1, \dots, Q\}$, et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est fonction régulière à support dans $[-2, 2]$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{q \in S, a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} \phi(MQ(t - a/q)) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (MQ)^{-1} \hat{\phi}(2\pi m/(MQ)) c_m e^{2i\pi mt}, \quad (4.27)$$

avec

$$c_m = \sum_{q \in S, a \in Z_q, (a,q)=1} e^{\frac{-2i\pi m \cdot a}{q}}, \quad \sup_{m \in \mathbb{Z}} |c_m| \leq 4Q^2, \quad |c_m| \leq C_\gamma d(m, Q) Q^{1+\gamma},$$

où $d(m, q)$ représente le nombre de diviseurs de m qui sont inférieurs ou égaux à Q .

On va à présent utiliser la méthode du cercle de Hardy-Littlewood afin d'obtenir l'inégalité (4.26). Par définition des $p_{k,j}$, on a pour $(k, j) \in T_K$

$$\begin{aligned} p_{k,j}(2\pi t) &= \sum_{q=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} \phi_{j+K+k+10}(t-a/q), \quad \text{si } j \leq K-k-1, \\ p_{k,K-k}(2\pi t) &= \sum_{q=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} \phi_{\geq 2K+10}(t-a/q). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \rho_{k,j} p_{k,0}(2\pi t) &= 2^{-j} \sum_{q=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} \phi_{K+k+10}(t-a/q), \quad \text{si } j \leq K-k-1 \\ \rho_{k,K-k} p_{k,0}(2\pi t) &= 2^{-K+k+1} \sum_{q=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} \phi_{\geq 2K+10}(t-a/q). \end{aligned}$$

Donc pour $j \leq K-k-1$, on a en notant $S = \{1, \dots, Q\}$ et $Q = 2^k - 1$

$$\begin{aligned} &(p_{k,j} - \rho_{k,j} p_{k,0})(2\pi t) \\ &= \sum_{q=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} \phi_{j+K+k+10}(t-a/q) - 2^{-j} \phi_{K+k+10}(t-a/q) \\ &= \sum_{q \in S, a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} \phi^1(2^{j+K+k+10}(t-a/q)) - 2^{-j} \phi^1(2^{K+k+10}(t-a/q)) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{2i\pi m t} \left[2^{-j-K-k-10} \widehat{\phi^1}(2\pi m / 2^{j+K+k+10}) - 2^{-j} 2^{-K-k-10} \widehat{\phi^1}(2\pi m / 2^{K+k+10}) \right] \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{2i\pi m t} 2^{-j-K-k-10} \left[\widehat{\phi^1}(2\pi m / 2^{j+K+k+10}) - \widehat{\phi^1}(2\pi m / 2^{K+k+10}) \right], \end{aligned}$$

où $c_m = \sum_{q=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}, (a,q)=1} e^{-2i\pi m \cdot a/q}$.

De la même manière, on a

$$\begin{aligned} &(p_{k,K-k} - \rho_{k,K-k} p_{k,0})(2\pi t) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{2i\pi m t} \left[2^{-2K-10} \widehat{\phi^1}(2\pi m / 2^{2K+10}) - 2^{-K+k+1} 2^{-K-k-10} \widehat{\phi^1}(2\pi m / 2^{K+k+10}) \right] \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{2i\pi m t} 2^{-2K-10} \left[\widehat{\phi^1}(2\pi m / 2^{2K+10}) - 2^{-1} \widehat{\phi^1}(2\pi m / 2^{K+k+10}) \right]. \end{aligned}$$

On a donc, pour $(k, j) \in T_K$

$$(p_{k,j} - \rho_{k,j} p_{k,0})(2\pi t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_m e^{2i\pi m t},$$

$$b_0 = 0, \quad |b_m| \leq C_\gamma d(m, 2^{k+1}) 2^{k(1+\gamma)} 2^{-j-k-K} (1 + |m|/2^{K+k})^{-10}, \quad \gamma > 0.$$

Et comme $d(m, Q) \leq C_\gamma |m|^\gamma, \gamma > 0$, pour tout $(m, Q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}_+^*$, on en déduit

$$|b_m| \leq C_\gamma 2^{\gamma(j+K+k)} 2^{-j-K} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z}.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}_L(t) (P_{k,j} - \rho_{k,j} p_{k,0}) (2\pi t) \phi^1(2^5 t) e^{-itb} dt \right| \\ & \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |b_m| \left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}_L(t) \phi^1(2^5 t) e^{-it(b-2\pi m)} dt \right| \\ & \leq C_\gamma 2^{\gamma(j+K+k)} 2^{-j-K}. \end{aligned}$$

Donc, en prenant $\gamma = \delta/100$, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} \int_{\mathbb{R}} \left| \tilde{\phi}_L(t) (P_{k,j} - \rho_{k,j} p_{k,0}) (2\pi t) \phi^1(2^5 t) e^{-itb} \right| dt \\ & \leq \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} C_\gamma 2^{\gamma(j+K+k)} 2^{-j-K} \\ & \leq \sum_{(k,j) \in T_K, 2j > L} C_\gamma 2^{\delta/100(j+K+k)-(j+K)}. \end{aligned}$$

Donc pour γ suffisamment petit (par exemple $\gamma = \delta/100$), on obtient l'inégalité (4.26).

- Cas 2 : $L \geq 2K - \delta K, \delta = 1/100$. Pour $b \in \mathbb{Z}^+$ suffisamment grand on pose

$$K_N^{1,\lambda}(t, x) := K_N(t, x) \cdot \left[\sum_{l=4}^{L-41} \phi_l(t/(2\pi)) \left(e(t) + \sum_{(k,j) \in T_K, 2j \leq L-b} p_{k,j}(t) \right) \right]. \quad (4.28)$$

Grâce aux inégalités (4.17) et (4.18), on obtient

$$\begin{aligned} \left| K_N^{1,\lambda}(t, x) \right| & \lesssim \sum_{l=4}^{L-41} |K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) \cdot e(t)| + \sum_{l=4}^{L-41} \sup_{(k,j) \in T_K, 2j \leq L-b} |K_N(t, x) \cdot \phi_l(t/(2\pi)) \cdot p_{k,j}(t)| \\ & \lesssim \sum_{l=4}^{L-41} 2^{l/2} 2^{3K/2} + \sum_{l=4}^{L-41} 2^{l/2} 2^{3K/2} 2^{3j/2} \lesssim 2^{L/2} 2^{3K/2} + 2^{L/2} 2^{3K/2} 2^{3L/4} 2^{-3b/4}. \end{aligned}$$

Rappelons qu'on a obtenu dans le cas précédent $2^{L/2} 2^{3K/2} \leq 2^{2L/(p_0-2)} 2^{K(4p_0-12)/(p_0-2)}$.

Ainsi, on a

$$\left| K_N^{1,\lambda}(t, x) \right| \lesssim 2^{2L/(p_0-2)} 2^{K(4p_0-12)/(p_0-2)} \cdot 2^{-3b/4} 2^{(L-2K)(5p_0-18)/(4p_0-8)}.$$

Et donc par la relation (4.20), on arrive à la conclusion suivante $\|K_N^{1,\lambda}\|_{L_{t,x}^\infty} \lesssim \lambda^2/2$.

Les reste de la preuve est similaire au cas 1 et on renvoie le lecteur intéressé à l'article [10]. \square

Chapitre 5

Existence locale

L'objectif ici est de démontrer l'existence locale d'une solution de NLS cubique sur la variété semi-périodique $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$.

Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on définit l'espace $X^1(I)$ comme suit

$$X^1(I) := \{u \in C(I; H^1) \text{ tel que } \|u\|_{X^1(I)} := \sup_{J \subseteq I, |J| \leq 1} [\inf\{\|v\|_{X^1(I)} : v|_J = u\}] < \infty\}.$$

Pour le contrôle du terme non linéaire sur un intervalle $I = (a, b)$, on définit la norme suivante

$$\|h\|_{N(I)} := \left\| \int_a^t e^{i(t-s)\Delta} h(s) ds \right\|_{X^1(I)}.$$

On aura également besoin de la norme suivante

$$\|u\|_{Z(I)} := \sup_{J \subseteq I, |J| \leq 1} \left\| \left(\sum_N N^2 \|P_N u(t)\|_{L^4_{(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)}}^4 \right)^{\frac{1}{4}} \right\|_{L^4_t(J)}.$$

Remarque 5.1.

On montrera dans la suite l'injection suivante $X^1(I) \hookrightarrow Z^1(I)$.

Définition 5.1.

Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on dit que $u \in C(I; H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3))$ est une solution forte de (1.1) si $u \in X^1(I)$ et si u satisfait pour tous $t, s \in I$,

$$u(t) = e^{i(t-s)\Delta} u(s) - i \int_s^t e^{i(t-t')\Delta} (u(t')|u(t')|^2) dt'.$$

Les estimations de Strichartz-Ionescu-Pausader entraînent le résultat suivant

Lemme 5.1. $\forall p > 18/5, \forall C \in \mathcal{C}_N$, on a

$$\|P_C u\|_{L^p([-1,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)} \lesssim N^{2-6/p} \|P_C u\|_{U^p_{\Delta}(\mathbb{R}, L^2)}.$$

Démonstration.

Soit $u \in U^p_{\Delta}(\mathbb{R}, L^2)$. Alors $\exists v \in U^p(\mathbb{R}, L^2)$ telle que $u(t) = e^{it\Delta} v(t)$. On a donc par application de l'inégalité de Hölder ainsi que de l'inégalité de Strichartz (4.1)

$$\begin{aligned}
\|P_C u\|_{L_{t,x}^p} &= \|P_C e^{it\Delta} v\|_{L_{t,x}^p} = \|P_C \left(\sum_{j \geq 1} \lambda_j \sum_{k=1}^{K_j} \mathbf{1}_{[t_{k-1}^j, t_k^j]} e^{it\Delta} \varphi_{k-1}^j \right)\|_{L_{t,x}^p} \\
&\leq \sum_{j \geq 1} |\lambda_j| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{K_j} \mathbf{1}_{[t_{k-1}^j, t_k^j]} P_C e^{it\Delta} \varphi_{k-1}^j \right\|_{L_{t,x}^p} \leq \sum_{j \geq 1} |\lambda_j| \left\| \sum_{k=1}^{K_j} \mathbf{1}_{[t_{k-1}^j, t_k^j]} \|P_C e^{it\Delta} \varphi_{k-1}^j\|_{L_x^p} \right\|_{L_t^p} \\
&\leq \sum_{j \geq 1} |\lambda_j| \left\| \left(\sum_{k=1}^{K_j} |\mathbf{1}_{[t_{k-1}^j, t_k^j]}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{K_j} \|P_C e^{it\Delta} \varphi_{k-1}^j\|_{L_x^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_t^p} \\
&\leq \sum_{j \geq 1} |\lambda_j| \left(\sum_{k=1}^{K_j} \|P_C e^{it\Delta} \varphi_{k-1}^j\|_{L_{t,x}^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \sum_{j \geq 1} |\lambda_j| \left(\sum_{k=1}^{K_j} N^{2p-6} \|P_C \varphi_{k-1}^j\|_{L_x^2}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \sum_{j \geq 1} |\lambda_j| \cdot N^{2-6/p} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{K_j} \|P_C \varphi_{k-1}^j\|_{L_x^2}^p}_{=1} \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim N^{2-6/p} \|P_C u\|_{U_{\Delta}^p(\mathbb{R}, L^2)}.
\end{aligned}$$

□

On aura également besoin de l'estimation de type Sobolev suivante

Lemme 5.2. $\forall f \in H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$, on a

$$\|f\|_{L_x^4} \lesssim \left(\sup_N N^{-1} \|P_N f\|_{L_x^\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_{H_x^1}^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L_x^4}^4 &\lesssim \sum_{N_1 \sim N_2 \geq N_3 \geq N_4} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}^3} |P_{N_1} f \cdot P_{N_2} f \cdot P_{N_3} f \cdot P_{N_4} f| dx \\
&\lesssim \sum_{N_1 \sim N_2 \geq N_3 \geq N_4} \|P_{N_3} f\|_{L^\infty} \|P_{N_4} f\|_{L^\infty} \|P_{N_1} f\|_{L^2} \|P_{N_2} f\|_{L^2} \\
&\lesssim \left(\sup_N N^{-1} \|P_N f\|_{L^\infty} \right)^2 \sum_{N_1 \sim N_2 \geq N_3 \geq N_4} N_3 N_4 \|P_{N_1} f\|_{L^2} \|P_{N_2} f\|_{L^2} \\
&\lesssim \left(\sup_N N^{-1} \|P_N f\|_{L^\infty} \right)^2 \sum_{N_1 \sim N_2} N_1^2 \|P_{N_1} f\|_{L^2} \|P_{N_2} f\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|f\|_{L_x^4} \lesssim \left(\sup_N N^{-1} \|P_N f\|_{L^\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_N N^2 \|P_N f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\sup_N N^{-1} \|P_N f\|_{L^\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_{H_x^1}^{\frac{1}{2}}.$$

□

Lemme 5.3. Soient $\text{mes}(I) \leq 1$, $P_{N_i} = u_i$ pour $i = 1, 2$ et $N_1 \geq N_2$. Alors, pour un certain $\kappa > 0$, on a

$$\|u_1 u_2\|_{L_{t,x}^2(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)} \lesssim \left(\frac{N_2}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right)^\kappa \|u_1\|_{Y^0(I)} \|u_2\|_{Z'(I)}, \quad (5.1)$$

où $\|u\|_{Z'(I)} = \|u\|_{Z(I)}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{X^1(I)}^{\frac{1}{4}}$.

Démonstration.

Pour tout cube $C \in \mathcal{C}_{N_2}$ centré en $\xi_0 \in \mathbb{Z}^4$, on a par application de Hölder, suivi de Strichartz ainsi que de l'injection $Y^0(I) \hookrightarrow U_{\Delta}^4(I, L^2)$:

$$\begin{aligned} \|(P_C u_1) u_2\|_{L_{t,x}^2(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)} &\leq \|P_C u_1\|_{L_{t,x}^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)} \cdot \|u_2\|_{L_{t,x}^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)} \\ &\lesssim N_2^{1/2} \|P_C u_1\|_{U_{\Delta}^4(I, L^2)} \cdot \|u_2\|_{L_{t,x}^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)} \\ &\lesssim \|P_C u_1\|_{Y^0(I)} \left(N_2^{1/2} \|u_2\|_{L_{t,x}^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, la propriété d'orthogonalité de l'opérateur P_C dans L^2 nous donne

$$\|u_1 u_2\|_{L_{t,x}^2}^2 \approx \sum_C \|P_C u_1 u_2\|_{L_{t,x}^2}^2.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|u_1 u_2\|_{L_{t,x}^2}^2 &\lesssim \sum_C \|P_C u_1\|_{Y^0(I)} \left(N_2^{1/2} \|u_2\|_{L_{t,x}^4} \right)^2 \lesssim \sum_C \|P_C u_1\|_{Y^0(I)} \left(N_2^{1/2} \left(\int_J \|u_2\|_{L_x^4}^4 dt \right)^{1/4} \right)^2 \\ &\lesssim \|u_1\|_{Y^0(I)}^2 \sup_{J \subseteq I, |J| \leq 1} \left(\sum_{N_2} N_2^2 \|u_2\|_{L_x^4}^4 dt \right)^{1/4} \lesssim \|u_1\|_{Y^0(I)}^2 \|u_2\|_{Z(I)}^2, \end{aligned}$$

où $\|u\|_{Z(I)} = \sup_{J \subseteq I, |J| \leq 1} \left(\sum_N N^2 \|P_N u(t)\|_{L^4(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)}^4 \right)^{1/4} \|u\|_{L_t^4(I)}$.

D'autre part, grâce à la proposition 2.1 de [8] on a pour un certain δ_0

$$\|u_1 u_2\|_{L_{t,x}^2(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)} \lesssim \left(\frac{N_2}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right)^{\delta_0} \|u_1\|_{Y^0(I)} \|u_2\|_{Y^0(I)}.$$

En combinant les deux inégalités précédentes et en remarquant que $X^1(I) \hookrightarrow Y^1(I)$, il vient

$$\begin{aligned} \|u_1 u_2\|_{L_{t,x}^2} &= \|u_1 u_2\|_{L_{t,x}^2}^{3/4} \|u_1 u_2\|_{L_{t,x}^2(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)}^{1/4} \lesssim \|u_1\|_{Y^0(I)}^{3/4} \|u_2\|_{Z(I)}^{3/4} \left(\frac{N_2}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right)^{\delta_0/4} \|u_1\|_{Y^0(I)} \|u_2\|_{X^1(I)} \\ &\lesssim \left(\frac{N_2}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right)^{\delta_0/4} \|u_1\|_{Y^0(I)} \underbrace{\|u_2\|_{Z(I)}^{3/4} \|u_2\|_{X^1(I)}^{1/4}}_{=\|u_2\|_{Z'(I)}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat en prenant $\kappa = \frac{\delta_0}{4}$. □

Nous aurons également besoin du résultat suivant qui permet d'obtenir une estimation du terme non linéaire

Lemme 5.4. *Pour $u_k \in X^1(I)$, $k = 1, 2, 3$, $|I| \leq 1$, on a*

$$\left\| \prod_{k=1}^3 \tilde{u}_k \right\|_{N(I)} \lesssim \sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \|u_i\|_{X^1(I)} \|u_j\|_{Z'(I)} \|u_k\|_{Z'(I)}. \quad (5.2)$$

où $\tilde{u}_k = u_k$ ou $\tilde{u}_k = \bar{u}_k$.

Démonstration. Admise. □

Nous sommes en mesure maintenant d'établir l'existence et l'unicité locale d'une solution du problème de Cauchy pour NLS cubique sur la variété semi-périodique $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$.

Théorème 5.5. *Soit $E > 0$ fixé. Il existe un $\delta_0 = \delta_0(E)$ tel que si*

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{Z'(I)} < \delta \tag{5.3}$$

pour $\delta \leq \delta_0$, $0 \in I$ avec $|I| \leq 1$ et pour $u_0 \in H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$ telle que $\|u_0\|_{H^1} \leq E$, alors il existe une unique solution forte de (1.1) $u \in X^1(I)$ telle que $u(0) = u_0$. De plus,

$$\|u - e^{it\Delta}u_0\|_{X^1(I)} \leq \delta^{\frac{5}{3}}. \tag{5.4}$$

Démonstration. La méthode est classique, on se ramène à un problème de point fixe sur un espace de Banach. Pour cela, on définit l'espace suivant

$$\mathfrak{S} = \{u \in X^1(I) : \|u\|_{X^1(I)} \leq 2E, \|u\|_{Z'(I)} \leq a\}.$$

On considère l'application suivante

$$\Phi(v) = e^{it\Delta}u_0 - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (v(s)|v(s)|^2) ds.$$

Pour tous $u, v \in \mathfrak{S}$, on a

$$\begin{aligned} u|u|^2 - v|v|^2 &= u|u|^2 - v|u|^2 + v|u|^2 - v|v|^2 = (u-v)|u|^2 + v(u\bar{u} - v\bar{v}) \\ &= (u-v)|u|^2 + v(u\bar{u} - \bar{u}v + \bar{u}v - v\bar{v}) = (u-v)|u|^2 + v[\bar{u}(u-v) + v(\bar{u} - \bar{v})] \\ &= (u-v)|u|^2 + (u-v)\bar{u}v + (\bar{u} - \bar{v})v^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X^1(I)} &= \left\| -i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (u(s)|u(s)|^2 - v(s)|v(s)|^2) ds \right\|_{X^1(I)} \\ &\leq \|u(s)|u(s)|^2 - v(s)|v(s)|^2\|_{N(I)} \\ &\leq \|(u-v)|u|^2\|_{N(I)} + \|(u-v)\bar{u}v\|_{N(I)} + \|(\bar{u} - \bar{v})v^2\|_{N(I)}. \end{aligned}$$

L'application du lemme 5.4 sur le premier terme $\|(u-v)|u|^2\|_{N(I)}$ nous donne

$$\begin{aligned} \|(u-v)|u|^2\|_{N(I)} &\lesssim \|u-v\|_{X^1(I)} \|u\|_{Z'(I)} \|\bar{u}\|_{Z'(I)} + \|\bar{u}\|_{X^1(I)} \|u-v\|_{Z'(I)} \|u\|_{Z'(I)} \\ &\quad + \|u\|_{X^1(I)} \|\bar{u}\|_{Z'(I)} \|u-v\|_{Z'(I)}. \end{aligned}$$

Grâce à l'injection $X^1(I) \hookrightarrow Z'(I)$ on obtient

$$\|(u-v)|u|^2\|_{N(I)} \lesssim \|u-v\|_{X^1(I)} \|u\|_{X^1(I)} \|u\|_{Z'(I)}.$$

Les deux autres termes se traitent de manière analogue. Ainsi

$$\begin{aligned}\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X^1(I)} &\lesssim \|u - v\|_{X^1(I)} [\|u\|_{X^1(I)}\|u\|_{Z'(I)} + \|v\|_{X^1(I)}\|v\|_{Z'(I)} + \|u\|_{X^1(I)}\|v\|_{Z'(I)} + \|u\|_{Z'(I)}\|v\|_{X^1(I)}] \\ &\lesssim \|u - v\|_{X^1(I)} (\|u\|_{Z'(I)} + \|v\|_{Z'(I)}) (\|u\|_{X^1(I)} + \|v\|_{X^1(I)}).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall u, v \in \mathfrak{S}$, on a

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X^1(I)} \lesssim Ea\|u - v\|_{X^1(I)}. \quad (5.5)$$

D'autre part, en remarquant que $U_{\Delta}^p(I, L^2) \hookrightarrow X^1(I)$ et en utilisant encore le lemme 5.4, on obtient

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_{X^1(I)} &\leq \|\Phi(0)\|_{X^1(I)} + \|\Phi(u) - \Phi(0)\|_{X^1(I)} \leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{X^1(I)} + \|u|u|^2\|_{N(I)} \\ &\lesssim \|e^{it\Delta}u_0\|_{U_{\Delta}^p(I, H^1)} + \|u\|_{X^1(I)}\|u\|_{Z'(I)}^2 \lesssim \underbrace{\|u_0\|_{U^p(I, H^1)}}_{=\|u_0\|_{H^1}} + Ea^2 \leq E(1 + C_1a^2).\end{aligned}$$

De même on a

$$\|\Phi(u)\|_{Z'(I)} \lesssim \|\Phi(0)\|_{Z'(I)} + \|\Phi(u) - \Phi(0)\|_{X^1(I)} \leq \delta + C_2Ea^2.$$

On choisit $a = 2\delta$ et on prend $\delta_0 = \delta_0(E)$ suffisamment petit. Pour $E(1 + C_1a^2) \leq 2$, on a $\|\Phi(u)\|_{X^1(I)} \leq 2E$. Par ailleurs, en choisissant $C_2 \leq \frac{1}{4E}$, on obtient $\|\Phi(u)\|_{Z'(I)} \leq 2\delta$. Ainsi, on a la stabilité de l'espace \mathfrak{S} par l'application Φ .

D'autre part, pour $\delta < \frac{1}{2\|u_0\|_{H^1}}$, on voit grâce à (5.5) que Φ est une contraction. Donc par application du théorème du point fixe de Banach, il existe une unique solution de 1.1 définie sur un voisinage ouvert.

En ce qui concerne l'unicité de la solution dans $X^1(I)$, supposons que $\exists u, v \in X^1(I)$ telles que $u(0) = v(0)$. Soit $E = \max(\|u\|_{X^1(I)}, \|v\|_{X^1(I)})$. Par continuité de la solution, $\exists J$ un ouvert contenant 0 tel que $u, v \in \mathfrak{S}_J$. Par unicité du point fixe sur \mathfrak{S} , $u|_J = v|_J$. Par conséquent $\{u = v\}$ est ouvert et fermé dans I . Donc par connexité $\{u = v\} = I$. D'où l'unicité sur tout I . □

Chapitre 6

Généralisation au cas $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^d$

Dans cette section, nous allons reprendre la méthode développée dans le chapitre précédent afin d'en déduire des inégalités de Strichartz dans le cas semi-périodique $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$.

Soient $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T})$ et $N \geq 1$. On a

$$e^{it\Delta} P_N \varphi(t, x) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}} e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} (\widehat{P_N \varphi})(\xi) d\xi.$$

Et comme précédemment

$$\|e^{it\Delta} P_N \varphi\|_{L_{t,x}^p(I \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}))} \leq (2\pi)^{-3} \|\varphi\|_{L_x^2} \|\mathbf{1}(t) \cdot F\|_{L_{t,x}^p(I \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T})},$$

où $F(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}} e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} m(\xi) d\xi$, $\|m\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z})} \leq 1$ et $I = [-2^{-10}, 2^{-10}]$.

Notre objectif est de prouver l'inégalité suivante

Théorème 6.1. *L'inégalité de Strichartz sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$*

Pour tout $p > p_1$ (p_1 sera précisé ultérieurement), pour tout $N = 2^j \geq 1$ et pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T})$, on a

$$\|e^{it\Delta} P_N \varphi\|_{L_{t,x}^p(I \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}))} \lesssim_p N^{3/2-5/p} \|\varphi\|_{L_x^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T})}. \quad (6.1)$$

On définit exactement comme dans le chapitre précédent les opérateurs de projection de Littlewood-Paley. Soit $\phi^1 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction régulière et paire telle que $\phi^1(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$ et $\phi^1(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 2$. Soit $\phi^3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 1]$, $\phi^3(\xi) = \phi^1(\xi_1)^2 \phi^1(\xi_2)^2 \phi^1(\xi_3)^2$.

On définit les projecteurs de Littlewood-Paley $P_{\leq N}$ et P_N où $N = 2^j \geq 1$ est un nombre dyadique par

$$\begin{aligned} \widehat{P_{\leq N} f}(\xi) &:= \phi^3(\xi/N) \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}, \\ \widehat{P_N f}(\xi) &:= \psi^3(\xi/N) \hat{f}(\xi) = [\phi^3(\xi/N) - \phi^3(2\xi/N)] \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

On définit le noyau de Schrödinger comme suit

$$\begin{aligned} K_N(t, x) &= \phi^1(ct) \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}} e^{-it|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} \phi^3(\xi/N) d\xi \\ &= \phi^1(ct) \left[\sum_{\xi_3 \in \mathbb{Z}} e^{-it|\xi_3|^2} e^{ix_3 \xi_3} \phi^1(\xi_3/N)^2 \right] \cdot \prod_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-it|\xi_j|^2} e^{ix_j \xi_j} \phi^1(\xi_j/N)^2 d\xi_j, \end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante explicite.

Grâce aux estimations de Bourgain sur le tore \mathbb{T} , on a

$$|K_N(t, x)| \lesssim \frac{N}{\sqrt{q}[1 + N|t/(2\pi) - a/q]^{1/2}} \cdot \left[\frac{N}{1 + N|t/(2\pi)|^{1/2}} \right]^2. \quad (6.2)$$

Soit le lemme suivant dont la preuve est similaire à (4.2).

Lemme 6.2. *Soient $p > p_1$, $N \geq 1$, $\lambda \in J_{N, p_0} = [N^{(3p_0-10)/(2p_0-6)}, (2N)^{3/2}]$. Alors, avec les mêmes notations qu'au chapitre précédent, on a*

$$\text{mes}(S_\lambda) \lesssim N^{\frac{3}{2}p_0-5} \lambda^{-p_0}. \quad (6.3)$$

Soient K et L fixés tels que $K \in \mathbb{Z}_+$; $N \approx 2^K$ et $\lambda^{p_0-2} N^{6-2p_0} \approx 2^L$. Un simple calcul nous donne alors $L \in \mathbb{Z} \cap [0, 2K+2]$.

Chapitre 7

Annexe

Il nous a semblé utile de donner une preuve complète des inégalités de Strichartz dans le cadre euclidien \mathbb{R}^d . En effet, les idées développées ici sont reprises dans la démonstration du théorème 4.1. Mais avant d'énoncer le théorème principal, nous allons expliquer le principe TT^* de Stein.

Lemme 7.1. *On note B un espace de Banach et H un espace de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{L}_c(H, B)$. $T^* : B' \rightarrow H$ est définie par : $(T^* x, y)_H = \langle x, \overline{Ty} \rangle_{B', B}$. Alors*

$$\|TT^*\|_{\mathcal{L}_c(B', B)} = \|T\|_{\mathcal{L}_c(H, B)}^2 = \|T^*\|_{\mathcal{L}_c(B', H)}^2.$$

Démonstration. Grâce à la caractérisation de la norme d'un vecteur d'un espace de Hilbert, on a

$$\|T^* x\|_H := \sup_{\|y\|_H=1} |(T^* x, y)_H|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|T^* x\|_H &= \sup_{\|y\|_H=1} |\langle x, \overline{Ty} \rangle_{B', B}| \\ &\leq \|x\|_{B'} \sup_{\|y\|_H=1} \|Ty\|_B \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}_c(H, B)} \|x\|_{B'}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\|T^*\|_{\mathcal{L}_c(B', H)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}_c(H, B)}$. De la même manière, on démontre que $\|T\|_{\mathcal{L}_c(H, B)} \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}_c(B', H)}$.

Par ailleurs, par composition des applications linéaires on a $\|TT^*\|_{\mathcal{L}_c(B', B)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}_c(H, B)} \|T^*\|_{\mathcal{L}_c(B', H)}$.

Enfin

$$\|TT^*\|_H^2 = (T^* x, T^* x)_H = \langle x, \overline{TT^* x} \rangle_{B', B} \leq \|x\|_{B'}^2 \|TT^*\|_{\mathcal{L}_c(B', B)},$$

Ainsi $\|T^*\|_{\mathcal{L}_c(B', H)}^2 \leq \|TT^*\|_{\mathcal{L}_c(B', B)}$, ce qui conclut la preuve. □

Remarque 7.1. *Le principe TT^* nous dit la chose simple suivante : il est équivalent de montrer que $T \in \mathcal{L}_c(H, B)$, que $T^* \in \mathcal{L}_c(B', H)$ ou que $TT^* \in \mathcal{L}_c(B', B)$.*

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le théorème de Ginibre-Velo sur les inégalités de Strichartz

Théorème 7.2. Soient (q, r) et (γ, ρ) des paires admissibles. Alors, on a

- Les estimations de Strichartz homogènes

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|\varphi\|_{L_x^2}.$$

- Les estimations de Strichartz inhomogènes

$$\left\| \int_{-\infty}^t e^{i(t-s)\Delta} \varphi F(s) \right\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim_{q,\gamma} \|F\|_{L_t^\gamma L_x^\rho}.$$

Remarque 7.2. D'après les estimations de Strichartz homogènes : pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on a $e^{it\Delta}\varphi \in L^r(\mathbb{R}^d)$; ce qui correspond à un effet régularisant.

Démonstration. On ne démontrera que la première inégalité. Pour les estimations inhomogènes, le lecteur pourra consulter [3].

Étape 1 : Identification des opérateurs T , T^* et TT^*

On pose $H = L^2(\mathbb{R}^d)$, $B = L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^d))$, et $B' = L^{q'}(\mathbb{R}, L^{r'}(\mathbb{R}^d))$ où (q, r) est une paire admissible. Soit $T : \varphi \mapsto [t \mapsto e^{it\Delta}\varphi]$. On sait aussi que $(e^{it\Delta})^* = e^{-it\Delta}$.

On a

$$\begin{aligned} \langle g, \overline{T\varphi} \rangle_{B', B} &= (T^* g, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} g(t, x) \overline{T\varphi}(x) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(g(t, \cdot), e^{it\Delta}\varphi \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-it\Delta} g(t, \cdot), \varphi \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-it\Delta} g(t, \cdot) dt, \varphi \right)_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$T^* : g \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} g(s) ds \quad \text{et} \quad TT^* : g \mapsto \left[t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} g(s) ds \right].$$

Étape 2 : Dispersion ponctuelle

Lemme 7.3. Soit $2 \leq p \leq \infty$ avec $1/p + 1/p' = 1$. Pour tout $t > 0$, $e^{it\Delta}$ est une application continue de $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour tout $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p} \leq (4\pi t)^{-d(1/2-1/p)} \|\varphi\|_{L^{p'}}. \quad (7.1)$$

Démonstration. Pour $p = 2$, on a par une double application de Plancherel

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta}\varphi\|_{L_x^2} &= \|u(t, \cdot)\|_{L_x^2} = (2\pi)^{-d/2} \|\widehat{u(t, \cdot)}\|_{L_\xi^2} \\ &= (2\pi)^{-d/2} \|\widehat{\varphi}\|_{L_\xi^2} = \|\varphi\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

Pour $p = \infty$, un calcul classique donne

$$e^{it\Delta}(t, x) = (4\pi it)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{|x-x'|^2}{4t}} \varphi(x') dx'.$$

Donc par inégalité de convolution, on obtient

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L_x^\infty} \leq (4\pi t)^{-d/2} \|\varphi\|_{L_x^1}.$$

Il ne reste plus qu'à interpoler pour $2 < p < \infty$ en utilisant le théorème de Riesz-Thorin. Ce qui conclut la preuve du lemme. \square

Étape 3 : Application du TT^*

L'idée centrale est d'estimer TT^* au lieu de T . Pour cela, on va utiliser la relation de dispersion obtenue auparavant. On a donc

$$\begin{aligned} \|TT^*g(t)\|_{L_x^r} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} g(s, x) ds \right\|_{L_x^r} \leq \int_{\mathbb{R}} \|e^{i(t-s)\Delta} g(s, x)\|_{L_x^r} ds \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)} \|g(s, \cdot)\|_{L_x^{r'}} ds \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\frac{2}{q}} \|g(s, \cdot)\|_{L_x^{r'}} ds. \end{aligned}$$

Étape 4 : Application de l'inégalité de Hardy-littlewood-Sobolev

On pose $h(t) = \|g(t, \cdot)\|_{L_x^{r'}}$. Donc pour $0 < \frac{2}{q} < 1$, on applique l'inégalité de Hardy-littlewood-Sobolev en temps, ce qui nous donne

$$\left\| \frac{1}{|t|^{\frac{2}{q}}} * h \right\|_{L_t^q} \lesssim \|h\|_{L_t^\gamma}; \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{\gamma} + \frac{2}{q}. \quad (7.2)$$

On obtient donc $\gamma = q'$ et $\|TT^*g\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$.

Ce qui est équivalent à

$$\|Tg\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|g\|_{L_x^2}.$$

\square

Remarque 7.3.

Nous n'avons démontré l'inégalité de Strichartz que dans le cas où la paire (q, r) est strictement admissible, i.e. $q > 2$. Le cas limite $q = 2$, nettement plus difficile, a été prouvé par Keel-Tao dans [12].

Remarque 7.4.

Considérons l'équation de Schrödinger libre

$$i\partial_t u + \Delta u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad u(t, x) \in \mathbb{C}. \quad (7.3)$$

Pour trouver la relation de dispersion associée à (7.3), on doit voir sous quelle condition l'onde monochromatique $(t, x) \mapsto e^{i(\xi \cdot x - wt)}$ vérifie l'équation de Schrödinger, ce qui nous donne $w = |\xi|^2$. On observe alors que la vitesse de propagation en espace d'un paquet d'onde localisé en Fourier à la fréquence $\xi \in \mathbb{R}^d$ dépend de ξ . Les ondes à hautes fréquences sont les plus rapides. L'onde linéaire

se décompose donc asymptotiquement en temps en une somme de paquets d'ondes décorrélés en espace et en fréquence : elle se disperse. Si le phénomène physique est parfaitement clair, sa traduction en termes mathématiques est moins évidente. Robert Strichartz a été le premier à transcrire la dispersion en "inégalités robustes". Ginibre et Velo ont par la suite démontré le théorème 7.2 . Les inégalités de Strichartz ont complètement révolutionné l'analyse non linéaire des EDP dispersives car elles permettent de convertir la dispersion en gain d'intégrabilité spatiale par moyenne temporelle.

Bibliographie

- [1] J. Bourgain, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations, *Geom. Funct. Anal.* **3** (1993), 107–156.
- [2] J. Bourgain, Global solutions of nonlinear Schrödinger equations, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume 46.
- [3] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger Equations, Courant Lecture Notes in Mathematics 10, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [4] R. Danchin, P. Raphael, cours : analyse non linéaire, cours de l'Ecole Polytechnique; <http://catalogue.polytechnique.fr/site.php?id=76>.
- [5] Martin Hadac, Sebastian Herr, and Herbert Koch, Well-posedness and scattering for the KP-II equation in a critical space, *Ann. Inst. H. Poincaré-AN* 26 (2009), no. 3, 917-941, Erratum published at <http://dx.doi.org/10.1016/j.anihpc.2010.01.006>
- [6] S. Herr, The quintic nonlinear Schrödinger equation on three-dimensional Zoll manifolds, Preprint (2011).
- [7] S. Herr, D. Tataru, and N. Tzvetkov, Global well-posedness of the energy critical nonlinear Schrödinger equation with small initial data in $H^1(T^3)$, Preprint (2010).
- [8] S. Herr, D. Tataru, and N. Tzvetkov, Strichartz estimates for partially periodic solutions to Schrödinger equations in $4d$ and applications, Preprint (2010).
- [9] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators I, *Classics in mathematics*, Springer, second edition, 1990.
- [10] A. D. Ionescu, B. Pausader, Global Well-posedness of the energy -critical defocusing NLS on $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$, *Commun. Math. Phys.* 312, 781-831 (2012).
- [11] R. Killip, M. Visan, Scale invariant Strichartz estimates on tori and applications, Preprint (2014).
- [12] Markus Keel and Terence Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5) :955– 980, 1998.
- [13] Robert S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3) :705–714, 1977.
- [14] H. Takaoka and N. Tzvetkov, On 2D Nonlinear Schrödinger equations with data on $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$, *J. Funct. Anal.* **182** (2001), no2, 427-442.
- [15] T. Tao, Nonlinear Dispersive Equations. Local and Global Analysis, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **106**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [16] Y. Wang, Periodic nonlinear Schrödinger equation in critical $H^s(\mathbb{T}^n)$ spaces, Preprint (2012).
- [17] A. Zygmund, On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables. *Studia math.*, 50 :189-201, 1974.