

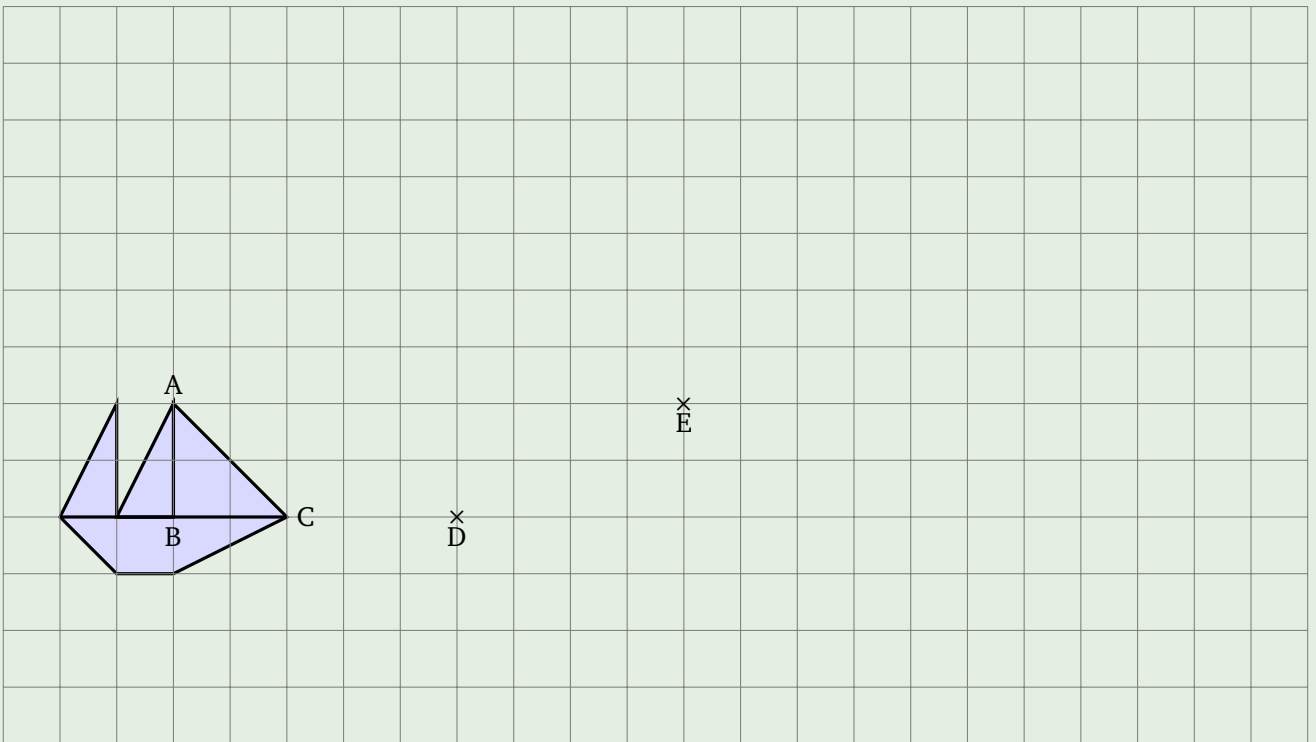
Manipuler les vecteurs du plan

I Le cours

1. Activité d'introduction

Méthode 1 : petits bateaux

- ❶ Construire (en rouge) l'image du bateau bleu par la translation qui transforme A en E.
- ❷ Construire (en vert) l'image du bateau bleu par la translation qui transforme D en E.

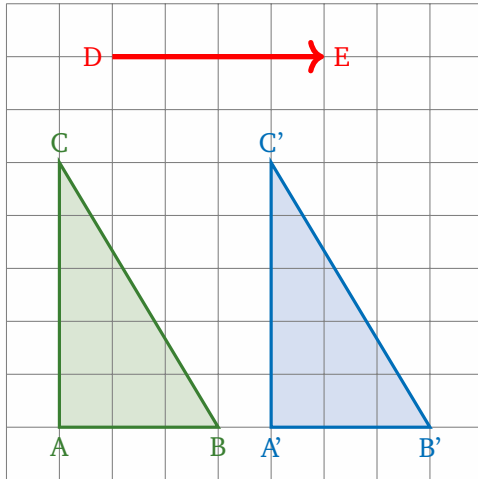


2. Translations et vecteurs

Définition 1 : translation (rappels de 4^e)

- Transformer une figure par **translation** revient à la faire **glisser** d'une **longueur** donnée, le long d'une droite donnée (appelée **direction**) et dans un **sens** donné.
- Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles définissent la même direction. Une direction étant donnée, deux sens de parcours sont possibles.

Exemple



- Le triangle rectangle $AB'C'$ est l'image du triangle rectangle ABC par la translation qui transforme le point D en E.
- La translation est symbolisée par une **flèche** qui donne la direction, le sens et la longueur de ce déplacement.
- La flèche symbolisant cette transformation est appelée vecteur DE et se note \vec{DE} . On parle de translation de vecteur \vec{DE} .
- La translation qui transforme D en E conserve l'alignement, les longueurs, les angles et les aires.

Définition 2 : vecteur associé à une translation

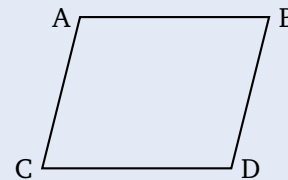
Soient A et B deux points quelconques distincts du plan.
 À la translation qui transforme A en B, on associe le vecteur \vec{AB} .
 La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur \vec{AB} .

Propriété 1 :

Soient A et B deux points distincts et soit C un point quelconque du plan.

Si le point C a pour image le point D par la translation de vecteur \vec{AB} , alors

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles
- $AB = CD$
- le quadrilatère ABDC est un **parallélogramme**.



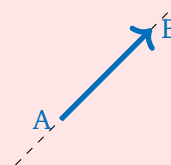
3. Vecteurs du plan

Définition 3 : vecteur

Soient A et B deux points distincts du plan.

Le vecteur \vec{AB} est caractérisé par :

- sa **direction** : la droite (AB)
- son **sens** : de A vers B
- sa **norme** $\|\vec{AB}\|$: la longueur AB



4. Égalité de deux vecteurs

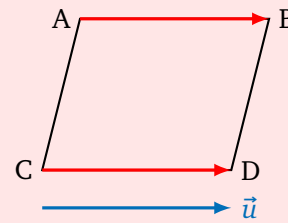
Définition 4 : égalité de deux vecteurs

- Affirmer que $\vec{AB} = \vec{CD}$ signifie que la translation qui transforme A en B, transforme C en D.
- Deux vecteurs sont donc égaux, si et seulement si, ils définissent la même translation.

Définition 5 : représentants d'un vecteur \vec{u}

On suppose que $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{u}$.

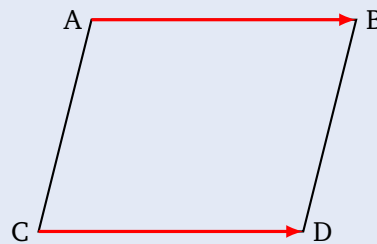
- ▶ \vec{AB} est **un représentant** du vecteur \vec{u} .
- ▶ \vec{AB} est **le représentant** du vecteur \vec{u} d'origine A.
- ▶ \vec{AB} et \vec{CD} sont des **représentants du même vecteur \vec{u}** .



Remarque : un vecteur admet une infinité de représentants.

Propriété 2 : une caractérisation

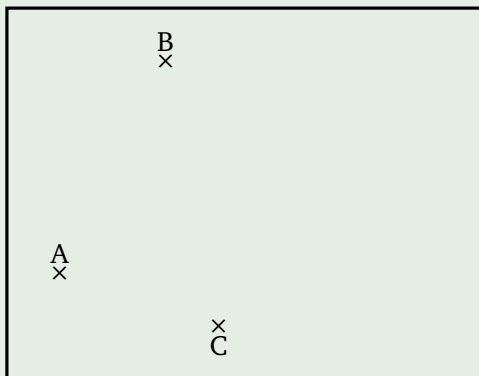
Deux vecteurs du plan \vec{AB} et \vec{CD} sont **égaux**, si et seulement si, ABDC est un parallélogramme.



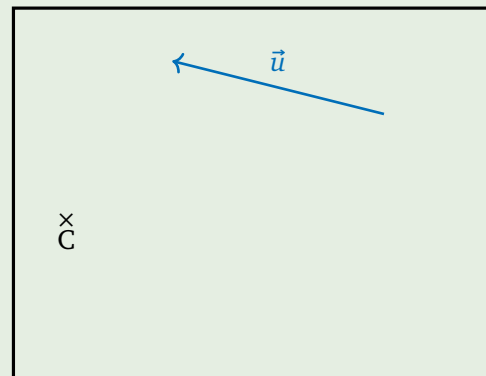
Méthode 2 : tracer des représentants d'un vecteur

Placer le point D tel que :

❶ $\vec{CD} = \vec{AB}$



❷ $\vec{DC} = \vec{u}$



5. Produit d'un vecteur par un nombre réel

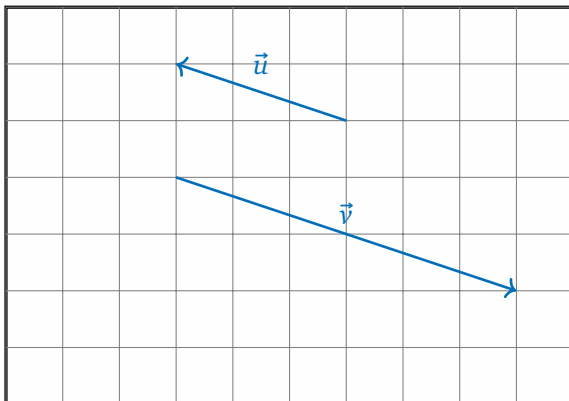
Définition 6 : produit d'un vecteur par un réel

Soit \vec{u} un vecteur non nul et soit λ un nombre réel non nul.
Le produit du réel λ par le vecteur \vec{u} , noté $\lambda\vec{u}$, est **un vecteur** tel que :

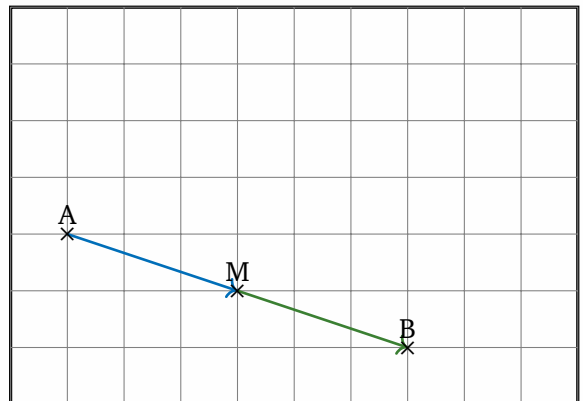
- ▶ \vec{u} et $\lambda\vec{u}$ ont la même direction ;
- ▶ \vec{u} et $\lambda\vec{u}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ont le même sens si } \lambda \text{ est strictement positif;} \\ \text{ont des sens contraires si } \lambda \text{ est strictement négatif;} \end{array} \right.$
- ▶ $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$ (on rappelle que $|\lambda|$ désigne la valeur absolue de λ).

Exemples

① $\vec{v} = -2\vec{u}$



② $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$



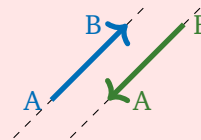
Définition 7 : opposé d'un vecteur

- La translation qui transforme A en A est la translation de vecteur nul que l'on note $\vec{0}$.
- Pour tout point A du plan, on a

$$\vec{AA} = \vec{0}$$

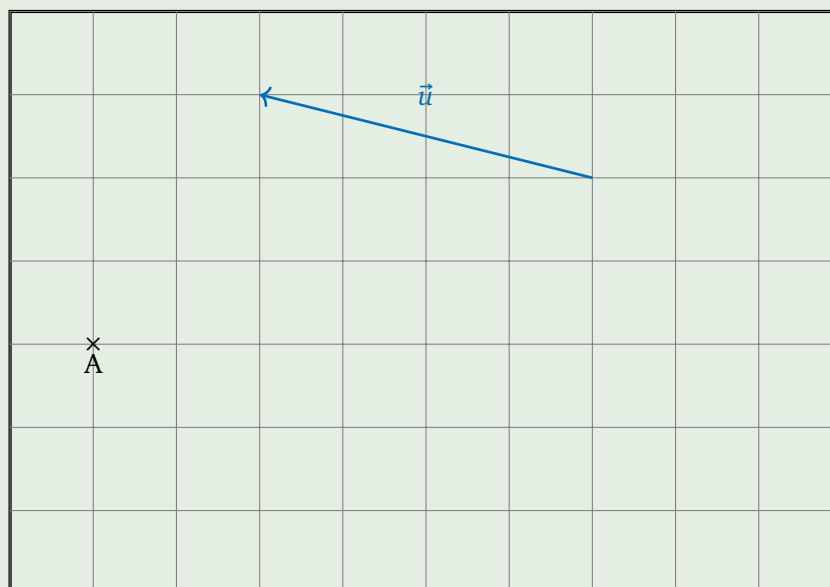
- Le vecteur opposé au vecteur \vec{AB} est le vecteur $-\vec{AB}$ associé à la translation qui transforme B en A.
- L'opposé du vecteur \vec{AB} est le vecteur \vec{BA} . Donc

$$\vec{BA} = -\vec{AB}$$



Méthode 3 : tracer un représentant du vecteur $\lambda\vec{u}$

Tracer le représentant du vecteur $-2\vec{u}$ d'origine A.

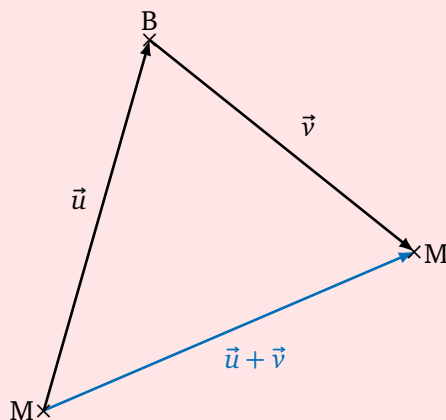


6. Somme de vecteurs et relation de Chasles

Définition 8 : somme de deux vecteurs

En enchaînant la translation de vecteur \vec{u} et celle de vecteur \vec{v} , on obtient une nouvelle translation. Le vecteur qui lui est associé est appelé somme des vecteurs \vec{u} et \vec{v} et noté $\vec{u} + \vec{v}$. La somme de deux vecteurs est un vecteur.

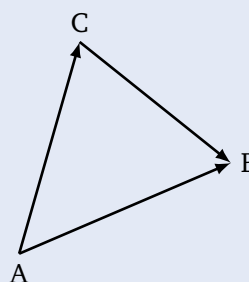
$$\vec{MM'} = \vec{MB} + \vec{BM'} = \vec{u} + \vec{v}$$



Propriété 3 : relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan, on a

$$\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$$



Histoire des maths

Ancien élève de l'École Polytechnique, Michel Chasles (1793 - 1880), est un mathématicien français et membre de l'Académie des sciences.

Travaillant sur les coniques, il démontre le résultat suivant : soient cinq coniques (ellipses, paraboles ou hyperboles) dans un plan ; il existe 3 264 coniques tangentes à ces cinq-là.

Il a par ailleurs inventé le mot homothétie et introduit le birapport de quatre points alignés, puissant outil de la géométrie projective.

⚠ Bien que son nom soit attaché à la relation de Chasles, cette propriété était connue et utilisée longtemps avant lui. Cependant les travaux de Chasles en géométrie ont largement contribué à son adoption dans le monde francophone.



7. Colinéarité de vecteurs

Définition 9 : vecteurs colinéaires

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction. Il existe donc un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Propriété 4 : droites parallèles

Soient A, B, C et D quatre points distincts.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, si et seulement si, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

Propriété 5 : points alignés

Soient A, B et C trois points distincts.

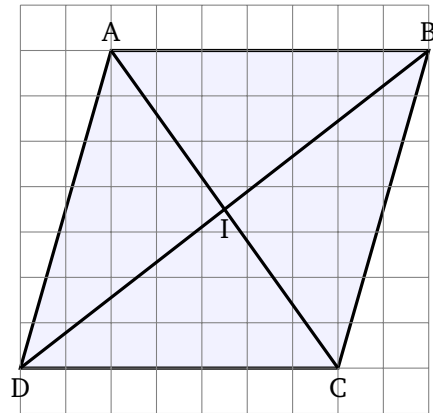
A, B et C sont alignés lorsque les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

II Les exercices

Exercice 1 Vrai ou faux ?

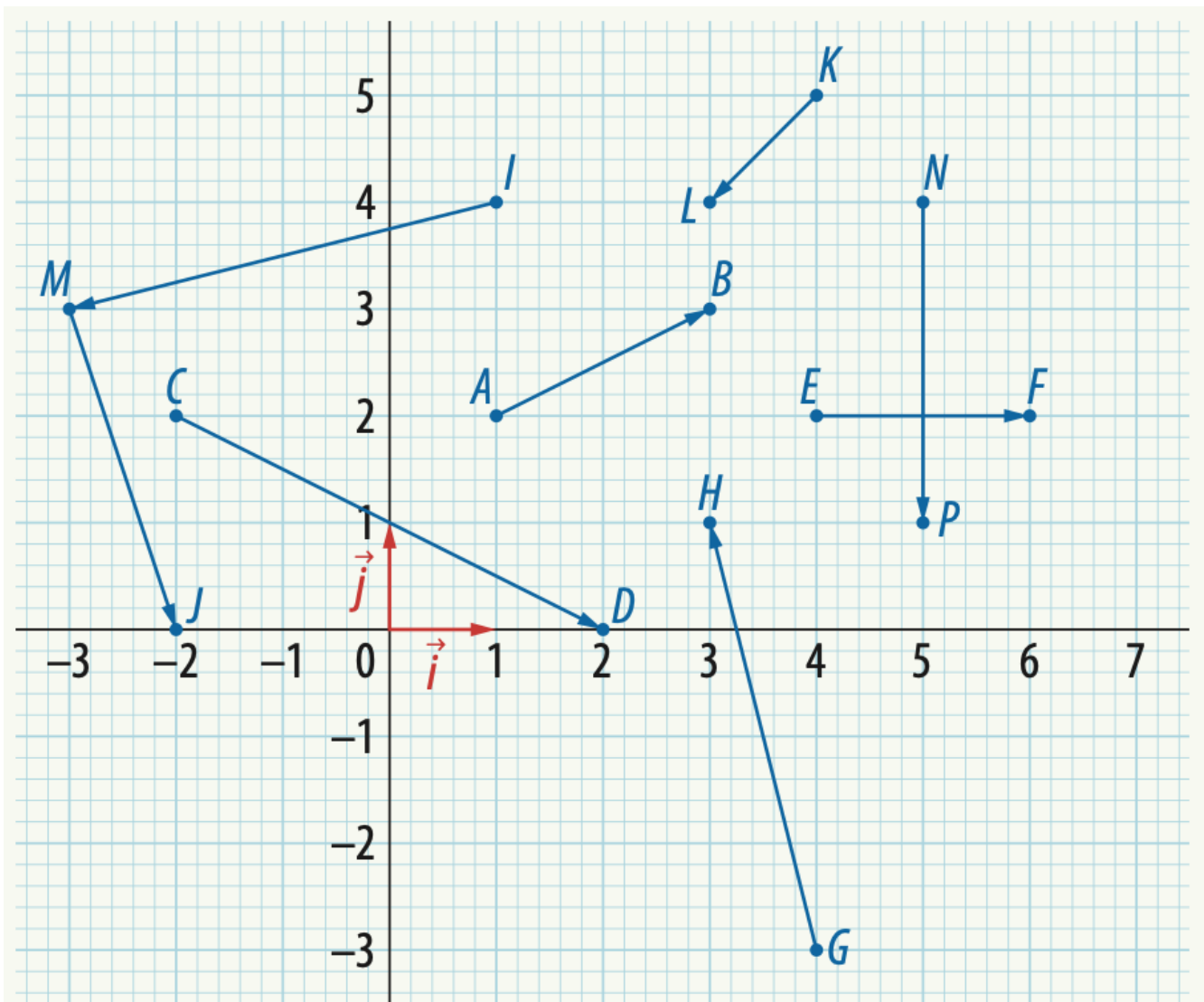
Construire un parallélogramme ABCD. Soit I l'intersection des diagonales.
Répondre par vrai ou faux pour chaque cas.

1. $\vec{DA} = \vec{CB}$
2. $\vec{AB} = \vec{CD}$
3. $\vec{AI} = \vec{CI}$
4. $\vec{CI} = \vec{IA}$
5. $\vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{DB}$
6. $\vec{DB} = 2\vec{IB}$
7. $\vec{DI} = \vec{AI}$



Exercice 2 Expression d'un vecteur

Exprimer chacun des vecteurs \vec{AB} , \vec{CD} , \vec{EF} , \vec{GH} , \vec{IM} , \vec{MJ} , \vec{KL} et \vec{NP} en fonction de \vec{i} et \vec{j} .



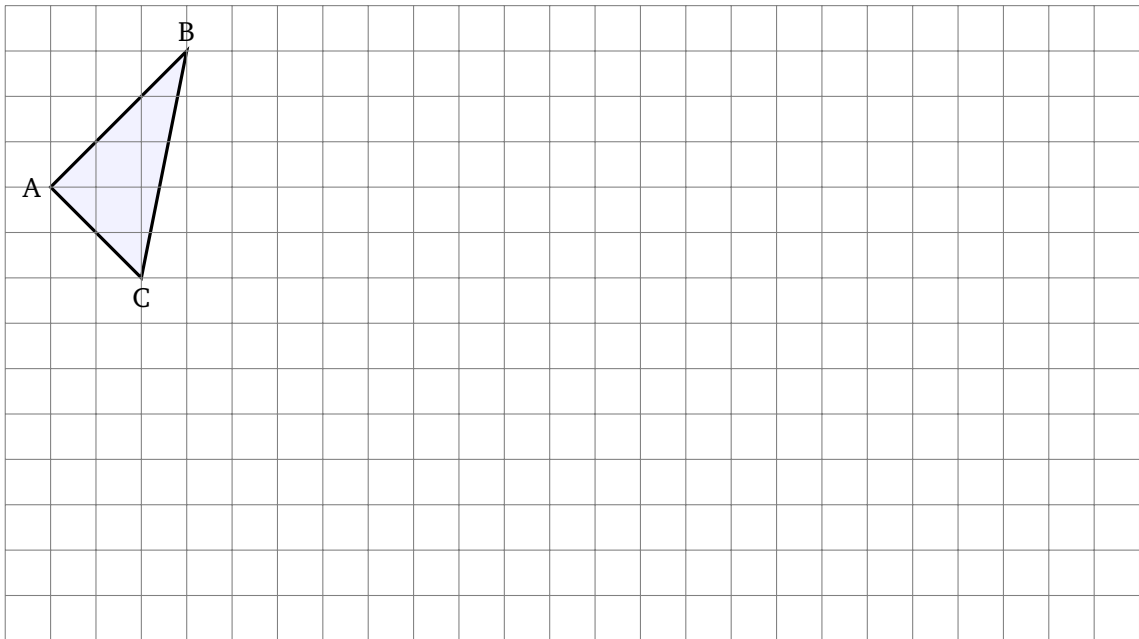
Exercice 3 Somme de vecteurs

1. Soit ABC un triangle. Construire les points M, N, et P tels que :

(a) $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$

(b) $\vec{CN} = \vec{AB} + \vec{AM}$

(c) $\vec{AP} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$

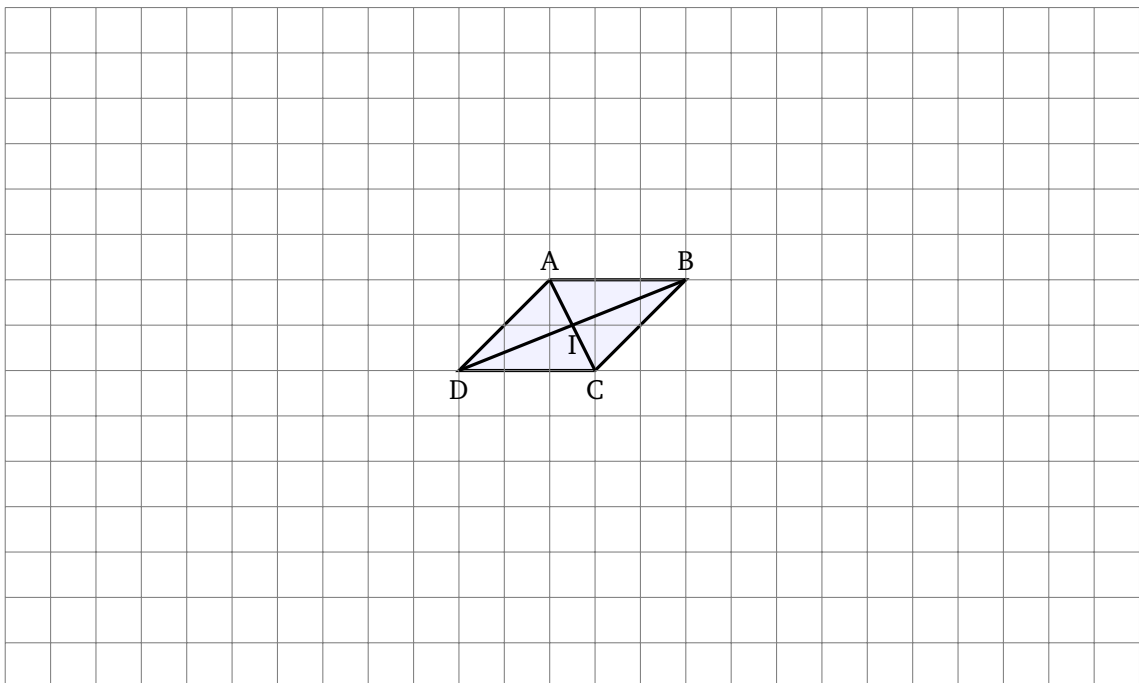


2. Soit ABCD un parallélogramme de centre I. Construire les points K, L et M tels que :

(a) $\vec{AK} = \vec{AB} - \vec{AC}$

(b) $\vec{BL} = \vec{BD} + \vec{BC}$

(c) $\vec{CM} = \vec{AB} - \vec{IC}$



Exercice 4 Vrai ou faux ? 2

Soit ABCD un carré de centre O.

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. $\vec{OA} = \vec{OC}$

2. $\vec{CO} = \vec{OA}$

3. $\vec{OA} = -\vec{OC}$

Exercice 5 Vrai ou faux ? 3

Soit $[AB]$ un segment et soit I son milieu.
Dire si les égalités suivantes sont vraies ou fausses.

1. $IA = IB$ 2. $\vec{IA} = \vec{IB}$ 3. $IA = -IB$ 4. $\vec{IA} = -\vec{IB}$

Exercice 6 Sommes de vecteurs 2

Soient A, B, C et D quatre points du plan. Simplifier l'écriture des vecteurs suivants.

1. $\vec{u} = \vec{AD} - \vec{AC}$
2. $\vec{v} = -2\vec{AC} + \vec{AD} - \vec{BD} - \vec{DA} + \vec{DC}$
3. $\vec{w} = \vec{BD} - 2\vec{BA} + \vec{DA} - \vec{AB}$

Exercice 7 Utilisation de la relation de Chasles

Écrire chacune des sommes de vecteurs ci-dessous sous la forme d'un seul vecteur.

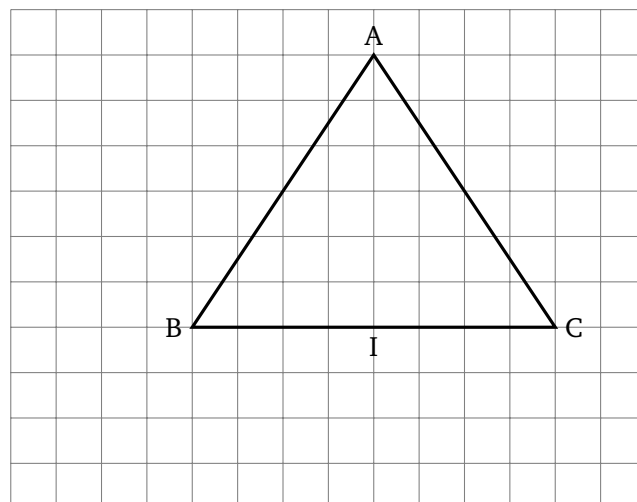
1. $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{AD}$
2. $2\vec{GA} + \vec{AC} - \vec{GC}$
3. $\vec{CD} - (\vec{CA} + \vec{CB}) - (\vec{AB} - \vec{DB})$

Exercice 8 Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle quelconque. I désigne le milieu de $[BC]$.

On définit le centre de gravité G du triangle ABC par la relation vectorielle $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI}$.

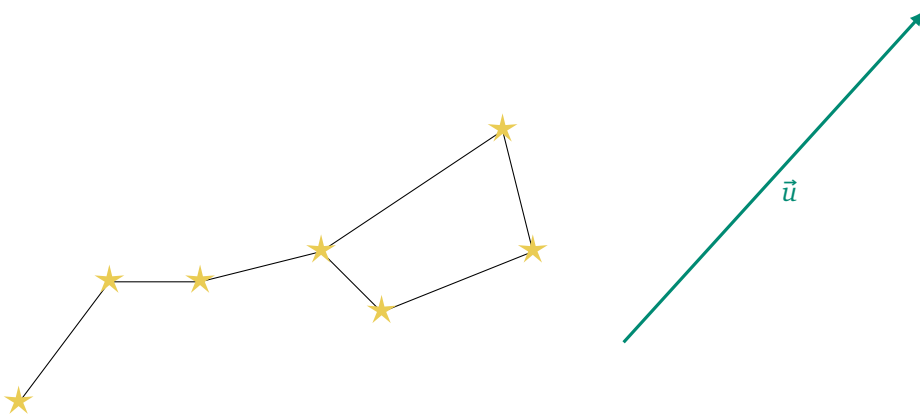
1. Tracer le point G sur la figure ci-dessous.
2. Tracer le symétrique D de G par rapport au point I .



3. Que peut-on dire du quadrilatère $GCDB$?
4. Montrer que la somme $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$ est égale au vecteur nul.
5. Soit T un point du plan qui vérifie la relation vectorielle $\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = \vec{0}$.
(a) Montrer que $3\vec{TG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.
(b) Que peut-on dire du point T ? Justifier.

Exercice 9 **La Grande Ourse**

En prenant comme référence ce que verra Andrew Wiles en levant les yeux, cette nuit entre 1h00 et 2h00, la Grande Ourse se translatera dans le ciel selon le vecteur \vec{u} .
 La Grande ourse déjà tracée est ce que Andrew Wiles verra dans le ciel à 1h00.
 Construire ce que verra Andrew Wiles à 2h00.



Exercice 10 **Un ensemble de points**

Soient A et B deux points du plan, et I le milieu du segment [AB].
 Montrer que l'ensemble des points M du plan qui vérifient

$$\left\| \vec{MA} + \vec{MB} \right\| = AB$$

est le cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$.

Exercice 11 **Position relative de droites**

Soit ABC un triangle non aplati et soient M et N deux points tels que

$$\vec{AM} = 3\vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{BN} = -2\vec{BA}.$$

1. Montrer que $\vec{MN} = 3\vec{CB}$.
2. En déduire la position relative des droites (MN) et (BC).