Chapitre 5

Signe et variations d'une fonction

I Le cours

1. Signe d'une fonction

Pour étudier **algébriquement** le signe d'une fonction (produit ou quotient), on dresse un tableau de signes comme le montre les méthodes suivantes.

Méthode 1 : tableau de signes d'un produit

Étudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-2)(5-x)$.

Corrigé

❶ On résout d'abord dans $\mathbb{R}$ les équations $3x-2=0$ et $5-x=0$.

- $3x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x=2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{2}{3}$.
- $5-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=5$.

❷ On écrit ensuite **dans l'ordre croissant** les valeurs de x (solutions des équations précédentes) sur la 1re ligne du tableau de signes : $\dfrac{2}{3}$ puis 5.

❸ On complète enfin le tableau de signes en utilisant la règle des signes pour les fonctions affines $x \mapsto 3x-2$ et $x \mapsto 5-x$:

- à droite de $\dfrac{2}{3}$, la fonction $x \mapsto 3x-2$ est à valeurs positives ;
- à droite de 5, la fonction $5-x$ est à valeurs négatives.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		5		$+\infty$
signe de $3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(3x-2)(5-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par conséquent la fonction f est :

- à valeurs positives sur $\left[\dfrac{2}{3}\ ;\ 5\right]$;
- à valeurs négatives sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{2}{3}\right] \cup [5\ ;\ +\infty[$.

Méthode 2 : tableau de signes d'un quotient

Étudier le signe de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3-7x}{x+1}$.

Corrigé

La fonction g est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes).
Elle est bien définie, si et seulement si, son dénominateur est non nul : $x+1 \neq 0$.
Autrement dit la fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
On dit que -1 est une valeur interdite pour g.
Par ailleurs,

- $3-7x = 0 \iff x = \dfrac{3}{7}$.
- $x+1 = 0 \iff x = -1$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{7}$		$+\infty$
signe de $3-7x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{3-7x}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Par conséquent la fonction g est :

- à valeurs positives sur $\left]-1 \,;\, \dfrac{3}{7}\right]$;
- à valeurs négatives sur $]-\infty \,;\, -1[\cup \left]\dfrac{3}{7} \,;\, +\infty\right[$.

2. Sens de variation d'une fonction

Définition 1 : fonction croissante

- Une fonction f est **croissante sur un intervalle I** de $\mathbb{R}$ lorsque, pour tous x et y de I tels que $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$.
- Une fonction f est **strictement croissante sur un intervalle I** de $\mathbb{R}$ lorsque, pour tous x et y de I tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.
- On dit que la fonction f **conserve l'ordre**.
- La courbe représentative de f "monte".

Exemples

- Les fonctions affines $x \mapsto ax+b$, où a et b sont des nombres réels, sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ dès que $a > 0$.
- La fonction affine f définie par $f(x) = 2x+1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 3 : montrer qu'une fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Montrer que la fonction $f : x \mapsto 2x + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$.
Il s'agit de montrer que $f(x) < f(y)$.
Pour cela on va étudier la différence $f(y) - f(x)$ et montrer qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= 2y + 1 - (2x + 1) \\ f(y) - f(x) &= 2y + 1 - 2x - 1 = 2y - 2x \\ f(y) - f(x) &= 2(y - x). \end{aligned}$$

Or, $x < y$ donc $y - x > 0$ et a fortiori $2(y - x) > 0$.
On a ainsi prouvé que, si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$.
Par conséquent,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Définition 2 : fonction décroissante

- Une fonction f est **décroissante sur un intervalle I** de $\mathbb{R}$ lorsque, pour tous x et y de I tels que $x < y$, on a $f(x) \geq f(y)$.
- Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ lorsque, pour tous x et y de I tels que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$.
- On dit que la fonction f **change l'ordre**.
- La courbe représentative de f "descend".

Exemples

- Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$, où a et b sont des nombres réels, sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$ dès que $a < 0$.
- La fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 4 : montrer qu'une fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$.
Il s'agit de montrer que $g(x) > g(y)$. Pour cela on va étudier la différence $g(y) - g(x)$ et montrer qu'elle est strictement négative sur $\mathbb{R}$.
On a

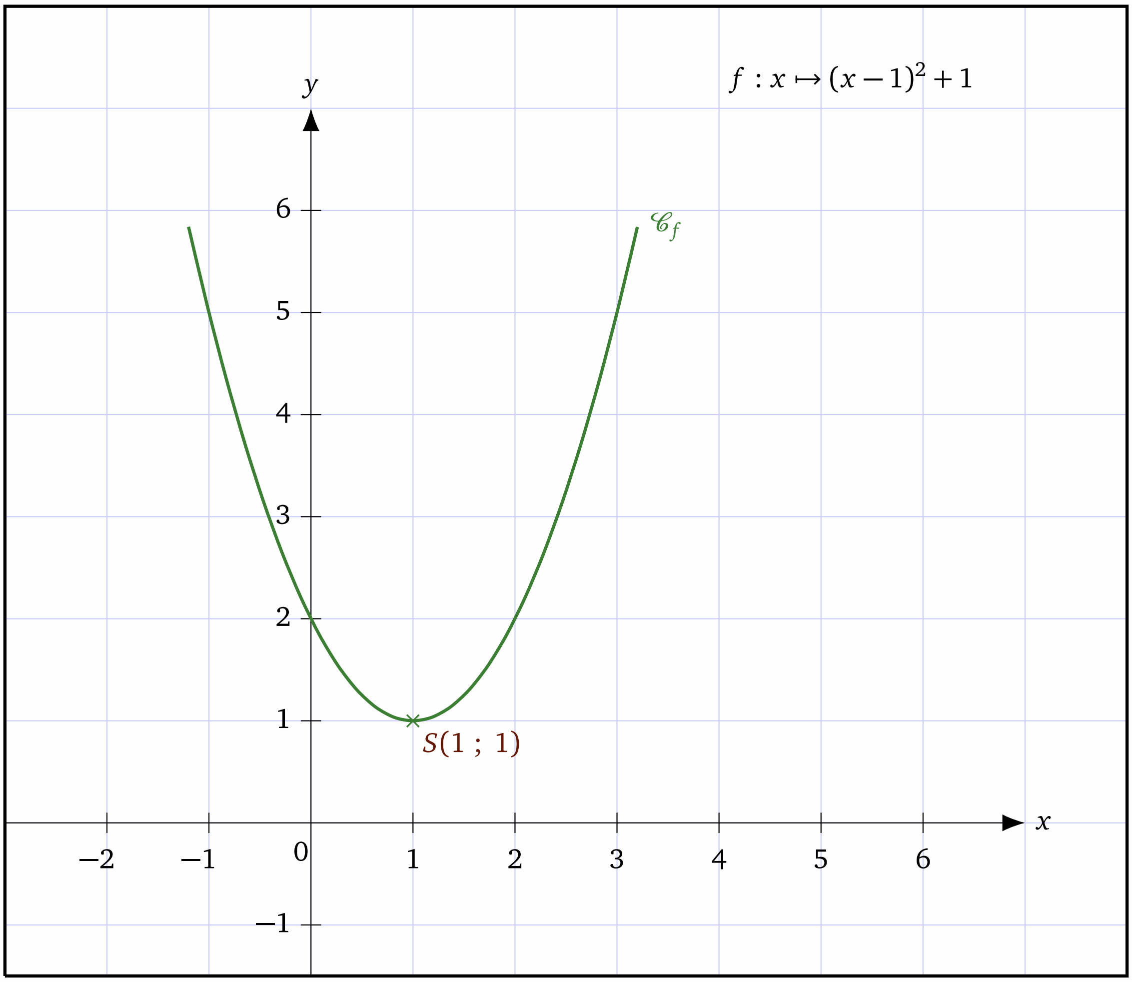
$$\begin{aligned} g(y) - g(x) &= -y - 1 - (-x - 1) \\ &= -y - 1 + x + 1 \\ &= x - y. \end{aligned}$$

Or, $x < y$, donc $x - y < 0$.
On a ainsi prouvé que, si $x < y$, alors $g(x) > g(y)$.
Par conséquent la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Définition 3 : tableau de variations d'une fonction

Étudier le sens de variation d'une fonction f, revient à déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante. On résume les variations de la fonction f dans un **tableau de variations**.

Exemple



Le tableau ci-dessous est appelé **tableau de variations** de la fonction f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

- la flèche dirigée vers le bas exprime la décroissance de la fonction f sur $]-\infty\ ;\ 1]$;
- la flèche dirigée vers le haut exprime la croissance de la fonction f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Méthode 5 : utilisation d'un tableau de variations

On considère le tableau de variations d'une fonction f.

x	-5		-1		2		5
Variations de f	0	↘	-3	↗	3	↘	-6

❶ Comparer $f(0)$ et $f(1)$. ❷ Comparer $f(-4)$ et $f(-3)$. ❸ Comparer $f(3)$ et $f(4)$.

Corrigé

❶ Les nombres 0 et 1 appartiennent tous les deux à l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$, sur lequel la fonction f est strictement croissante.
Et comme $0 < 1$, il en résulte que $f(0) < f(1)$ (f conserve l'ordre).

❷ Les nombres -4 et -3 appartiennent tous les deux à l'intervalle $[-5\ ;\ -1]$, sur lequel la fonction f est strictement décroissante.
Et comme $-4 < -3$, il en résulte que $f(-4) > f(-3)$ (f change l'ordre).

❸ Les nombres 3 et 4 appartiennent tous les deux à l'intervalle $[2\ ;\ 5]$, sur lequel la fonction f est strictement décroissante.
Et comme $3 < 4$, il en résulte que $f(3) > f(4)$ (f change l'ordre).

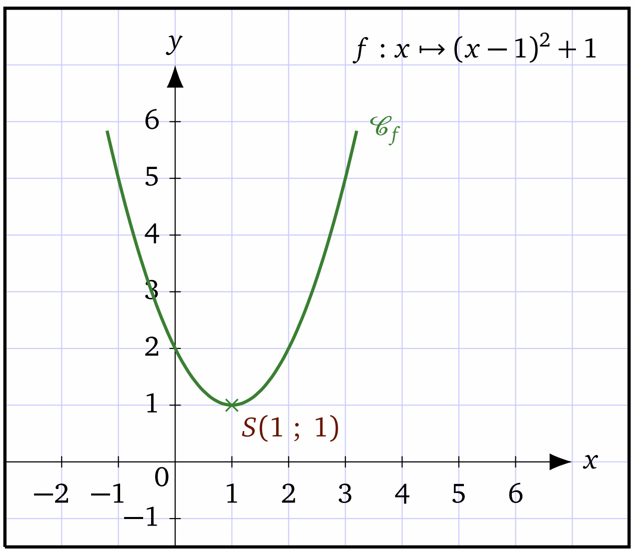
3. Minimum et maximum d'une fonction

Définition 4 : minimum et maximum d'une fonction

➤ Un nombre m est le **minimum** d'une fonction f sur un intervalle I signifie que pour tout nombre x de I, $m \leq f(x)$.

➤ Un nombre M est le **maximum** d'une fonction f sur un intervalle I signifie que pour tout nombre x de I, $f(x) \leq M$.

Exemple



- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire successivement

$$(x-1)^2 \geq 0 \qquad \text{puis} \qquad (x-1)^2+1 \geq 1.$$

Donc pour tout nombre réel x, on a $f(x) \geq 1$. Donc 1 est un minimum pour la fonction f.
- On a $f(1) = 1$. Donc ce minimum 1 est atteint en $x = 1$.

II Les exercices

Exercice 1 Signe d'une expression

À l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe de chacune des expressions suivantes.

1. $(3x-5)(2-x)$

2. $(2x-1)(-3-x)(x-2)$

3. $(3x+2)(2x+3)$

4. $\dfrac{5-x}{3+x}$

5. $3x\left(2-\dfrac{5}{3}x\right)$

6. $\dfrac{-3}{x(x+1)}$

Exercice 2 Tableau de signes d'un produit

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-17x+21$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x, on a $f(x)=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-7)$.

2. En déduire le tableau de signes de f.

Exercice 3 Tableau de signes d'un quotient

On considère la fonction f définie sur $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-3\,;\,\dfrac{11}{2}\right\}=\left]-\infty\,;\,-3\right[\cup\left]-3\,;\,\dfrac{11}{2}\right[\cup\left]\dfrac{11}{2}\,;\,+\infty\right[$ par

$$f(x)=\frac{3x^2+x-14}{2x^2-5x-33}$$

1. Montrer que pour tout nombre réel x, on a

$$3x^2+x-14=3\left(x+\frac{7}{3}\right)(x-2)$$

2. En déduire le tableau de signes de la fonction $x\mapsto 3x^2+x-14$.

3. Montrer que pour tout nombre réel x, on a

$$2x^2-5x-33=2(x+3)\left(x-\frac{11}{2}\right)$$

4. En déduire le tableau de signes de la fonction $x\mapsto 2x^2-5x-33$.

5. Compléter le tableau de signes de f suivant.

x	$-\infty$		-3		$\frac{-7}{3}$		2		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
signe de $3x^2+x-14$					0		0				
signe de $2x^2-5x-33$			0						0		
signe de $\dfrac{3x^2+x-14}{2x^2-5x-33}$			$\|$		0		0		$\|$		

6. Résoudre dans $\mathscr{D}_f$ l'inéquation $\dfrac{3x^2+x-14}{2x^2-5x-33}\leq 0$.

Exercice 4 Tableau de variations d'une fonction

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	2		4		10
			-2		
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$	
	-5				-3

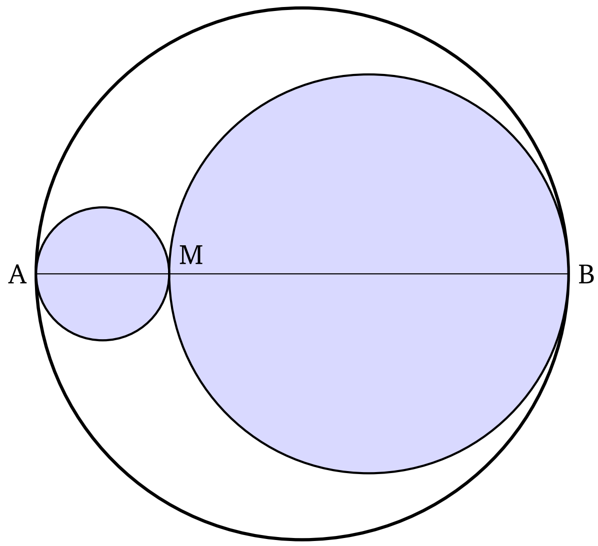
1. Déterminer $\mathscr{D}_f$, le domaine de définition de f.

2. Résoudre dans $\mathscr{D}_f$ l'inéquation $f(x) > 0$.

3. Quel est le maximum de f sur $\mathscr{D}_f$?

Exercice 5 Optimisation

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$ avec $AB = 4$.
On considère un point M du segment $[AB]$ et on pose $AM = x$ où $0 \leq x \leq 4$.



1. Montrer que la somme des aires des disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$\mathscr{A}(x) = \frac{\pi}{2}\left(x^2 - 4x + 8\right)$$

2. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 4]$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$

Montrer que $f(x) = (x-2)^2 + 4$.

3. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 4]$, on a $f(x) \geq 4$.

4. Que vaut le minimum de la fonction f sur son domaine de définition ?

5. Déterminer la position du point M pour que la somme des aires des disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ soit minimale.

Exercice 6 Utilisation d'un tableau de variations

On donne le tableau de variations d'une fonction f.

x	-10		-8		0		2		10
Variations de f	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	6

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

2. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer en justifiant si elle est vraie ou fausse.

(a) L'image de 0 par f est -8 ;

(b) f est strictement croissante sur $[2 ; 10]$;

(c) Pour tout $x \in [-10 ; 0]$, $f(x) > 0$;

(d) Le minimum de f sur $[-10 ; 10]$ est -3, atteint en $x = 2$;

(e) $f(-3) > f(-2)$;

(f) $f(1) > f(2)$;

(g) $f(0,5) > f(3)$.

Exercice 7 Tableau de variations d'une fonction 2

On considère une fonction g dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	0		10		12
Variations de g	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

Parmi les propositions suivantes, laquelle est fausse ? Justifier.

1. Le minimum de g sur $[0 ; 12]$ est -1.

2. Pour tout réel de $[0 ; 12]$, $g(x) > -1$.

3. L'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0 ; 12]$.

4. L'inéquation $g(x) < -1$ n'admet aucune solution dans $[0 ; 12]$.

Exercice 8 Variations d'une fonction

Étudier les variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes.

1. $f_1(x) = 9x$

2. $f_2(x) = 5x - 7$

3. $f_3(x) = 3 - 2x$

4. $f_4(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{5}$

Exercice 9 Ensemble de définition d'une fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 3}$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x, on a

$$x^2 + 5x + 3 = \left(x + \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$$

2. Dresser le tableau de signes de la fonction $x \mapsto x^2 + 5x + 3$, puis donner le domaine de définition de f.

Exercice 10 Tableau de variations d'une fonction 3

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variations de f	↗	-2	↘

Parmi les propositions suivantes, laquelle est fausse ?

1. L'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

2. L'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. L'inéquation $f(x) < 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

4. L'inéquation $f(x) > -1$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Min/Max

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f	↗	-1	↘

Parmi les propositions suivantes, laquelle est fausse ?

1. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -1 atteint en 1.

2. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1 atteint en -1.

3. Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est -1 atteint en 1.

4. Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est 1 atteint en -1.

Exercice 12 Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(3x-1)(2x+3)<0$

2. $\dfrac{3x-5}{3-x}\geq 0$

3. $(x-2)(2x+5)+(x-2)(x-11)\leq 0$

4. $\dfrac{4x-7}{3x+2}\geq 4$

5. $(1-x)(6x-5)(x+3)+(1-x)(x-5)(6x-5)<0$

6. $\dfrac{\left(3x^2-8\right)(7-5x)}{x-1}\leq 0$

7. $\dfrac{2x\,(x-5)^2}{5-3x}\geq 0$

Exercice 13 Un peu de logique

Soit la proposition suivante :

"si f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 10]$, alors $f(1)<f(2)$"

1. Cette proposition est-elle vraie ou fausse ?

2. Écrire la proposition réciproque ; est-elle vraie ou fausse ?