

### Les objectifs du chapitre

#### Contenu

- Proportion, pourcentage d'une sous-population dans une population
- Ensembles de référence inclus les uns dans les autres : pourcentage de pourcentage
- Évolution : variation absolue, variation relative
- Évolutions successives, évolution réciproque : relation sur les coefficients multiplicateurs (produit, inverse)

#### Capacités attendues

- Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages
- Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages
- Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution
- Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs. Calculer un taux d'évolution réciproque



# I Le cours

## 1. Proportion et pourcentage

### Définition 1 : population

Une population E est un **ensemble d'éléments** appelés individus, qui partagent certaines caractéristiques communes.  
 Son effectif, noté  $n_E$ , est le nombre d'éléments que contient cette population.

#### Exemple 1

Considérons une population de bactéries dans un laboratoire. Cette population est définie comme l'ensemble des bactéries d'une souche spécifique cultivées dans un milieu de culture.

- **Individus** : chaque bactérie dans le milieu représente un individu de la population.
- **Effectif** : si, après 24 heures de culture, on compte un million de bactéries, l'effectif de cette population, noté  $n_{\text{bactéries}}$ , est 1 000 000.

### Définition 2 : sous-population d'une population

Soit E une population d'effectif  $n_E$ .  
 Une sous-population A est un **sous-ensemble** de la population E.

#### Exemple 2

Dans l'exemple précédent, une sous-population pourrait être un groupe de bactéries qui ont une résistance particulière à un antibiotique.

### Définition 3 : proportion

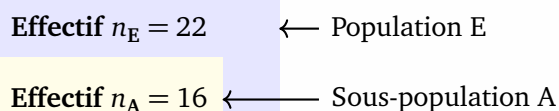
Soit E une population d'effectif  $n_E$  et soit A une sous-population d'effectif  $n_A$ .  
 La proportion de la sous-population A dans la population E est le rapport  $p$  défini par

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

#### Exemple 3

Considérons une classe d'élèves de seconde composée de 22 élèves au total.

- **Population** : la population E est l'ensemble des 22 élèves de la classe.
- **Effectif de la population** : l'effectif de la population, noté  $n_E$ , est 22.
- **Sous-population** : dans cette classe, il y a une sous-population A composée des élèves qui suivent l'option SIA.
- **Effectif de la sous-population** : cette sous-population compte 16 élèves, ce qui signifie que  $n_A = 16$ .
- **Proportion** : la proportion de A dans E est le nombre réel  $p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$ .



**Propriété 1 : quelques inégalités**

Soit E une population d'effectif  $n_E$  et soit A une sous-population d'effectif  $n_A$ .  
 En notant  $p$  la proportion de A dans E, on a

$$n_A \leq n_E \quad \text{et} \quad 0 \leq p \leq 1$$

**Remarque 1**

Une proportion peut s'écrire sous forme fractionnaire, sous forme décimale ou sous forme de pourcentage.  
 Par exemple  $p = \frac{3}{5}$  ou  $p = 0,6$  ou  $p = 60 \%$ .

**2. Pourcentage de pourcentage**

**Propriété 2 :**

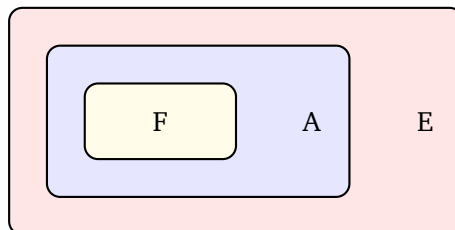
Soient A, E et F trois populations telles que :

- A est une sous-population de E;
- F est une sous-population de A;
- $p_1$  désigne la proportion de A dans E;
- $p_2$  la proportion de F dans A.

Alors la proportion de F dans E est donnée par

$$p = p_1 p_2$$

**Démonstration**



Notons  $n_A$ ,  $n_E$  et  $n_F$  les effectifs respectifs de A, E et F.

On a alors

$$p_1 = \frac{n_A}{n_E} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{n_F}{n_A}.$$

Il s'ensuit que,

$$p_1 \times p_2 = \frac{n_A}{n_E} \times \frac{n_F}{n_A} = \frac{n_F}{n_E}.$$

Le dernier rapport représente la proportion de F dans E et par conséquent, en notant  $p$  la proportion de F dans E, on conclut que  $p = p_1 p_2$ .

**Méthode 1 : déterminer le pourcentage d'un pourcentage**

36 % des élèves d'un lycée pratiquent une activité extrascolaire, dont 10 % font du rugby.  
 Déterminer le pourcentage d'élèves du lycée faisant du rugby.

**Corrigé**

Ce pourcentage est donné par  $\frac{36}{100} \times \frac{10}{100}$  soit 3,6 %.

### 3. Évolution : variation absolue et variation relative

Le nombre de bactéries dans un laboratoire, le prix d'un article, le nombre d'habitants d'un pays, par exemple, évoluent au cours du temps.

On dispose donc d'une **valeur initiale** avant évolution, notée  $y_1$  et d'une **valeur finale** après évolution, notée  $y_2$ .

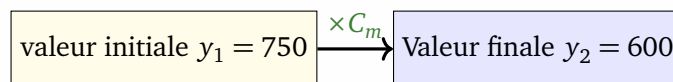
#### Définition 4 : coefficient multiplicateur

Le **coefficient multiplicateur** associé à une évolution est le nombre réel  $C_m$ , défini par

$$C_m = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} = \frac{y_2}{y_1}$$

#### Exemple 4

Le prix d'un ordinateur portable passe de 750 € à 600 €.



Le coefficient multiplicateur associé à cette évolution (une baisse dans ce cas) est donné par

$$C_m = \frac{600}{750} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

#### Définition 5 : variations absolue et relative

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux nombres réels **positifs**.

- La **variation absolue** de  $y_1$  à  $y_2$ , notée  $\Delta y$ , est le nombre réel

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

- Le **taux d'évolution** ou **variation relative** de  $y_1$  à  $y_2$ , est le nombre réel  $t$  défini par

$$t = \frac{\Delta y}{y_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$$

#### Exemple 5

On reprend l'exemple précédent de l'évolution du prix d'un ordinateur avec  $y_1 = 750$  € et  $y_2 = 600$  €. On en déduit alors que :

- La variation absolue est  $y_2 - y_1 = -150$  €.
- Le taux d'évolution est  $t = \frac{\Delta y}{y_1} = \frac{-150}{750} = \frac{-15}{75} = \frac{-1}{5} = -0,2$  ou encore  $t = -20$  %.
- Le coefficient multiplicateur est  $C_m = \frac{y_2}{y_1} = \frac{600}{750} = \frac{4 \times 15}{5 \times 15} = \frac{4}{5} = 0,8$ .

#### Propriété 3 : relation entre coefficient multiplicateur et taux d'évolution

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'évolution  $t$  vérifie l'identité

$$C_m = 1 + t$$

**Démonstration**

En notant  $y_1$  et  $y_2$  les valeurs initiale et finale, on a

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2 - y_1 + y_1}{y_1} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{y_1} + \frac{y_1}{y_1} \\ &= t + 1. \end{aligned}$$

**Remarque 2**

- ▶ Le taux d'évolution  $t$  peut être écrit sous forme décimale, fractionnaire ou de pourcentage.
- ▶ Lorsque  $t > 0$ , il s'agit d'une hausse.
- ▶ Lorsque  $t < 0$ , il s'agit d'une baisse.

**Méthode 2 : déterminer une valeur initiale**

En 2023, le PIB de la France, de 2 818 milliards d'euros, a augmenté de 6,78 % par rapport à 2022. Quel était le PIB de la France en 2022 ?

**Corrigé**

Le taux d'évolution  $t$  vaut 6,78 %.

Le coefficient multiplicateur de cette évolution est donné par

$$C_m = 1 + t = 1 + \frac{6,78}{100} = 1,0678.$$

Il en résulte que

$$\text{PIB}_{2023} = C_m \times \text{PIB}_{2022} \quad \text{ou encore} \quad \text{PIB}_{2022} = \frac{\text{PIB}_{2023}}{C_m}.$$

Autrement dit,

$$\text{PIB}_{2022} = \frac{2\,818}{1,0678} \approx 2\,639.$$

Ainsi, le PIB de la France en 2022 était d'environ 2 639 milliards d'euros.

**4. Évolutions successives**

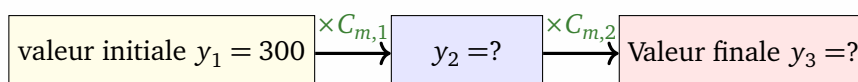
**Propriété 4 : coefficient multiplicateur global**

Lorsqu'une quantité subit deux évolutions successives, le coefficient multiplicateur global  $C_{m,g}$  est égal au produit des coefficients multiplicateurs associés aux deux évolutions, ce qui s'écrit

$$C_{m,g} = C_{m,1} \times C_{m,2}$$

**Exemple 6**

Un article coûte 300 €. Son prix subit une réduction de 15 % suivie d'une hausse de 5 %. On représente la situation à l'aide du schéma suivant



Or,

$$C_{m,1} = 1 + t_1 = 1 - \frac{15}{100} = 0,85 \quad \text{et} \quad C_{m,2} = 1 + t_2 = 1 + \frac{5}{100} = 1,05.$$

Il s'ensuit que

$$C_{m,g} = C_{m,1} \times C_{m,2} = 0,85 \times 1,05 = 0,8925.$$

On conclut que le prix de l'article a subi une baisse de 10,75 %.

**Remarque 3**

On n'ajoute pas les taux d'évolution !

Une baisse de 15 % suivie d'une hausse de 5 % ne correspond pas à une baisse de 10 %.

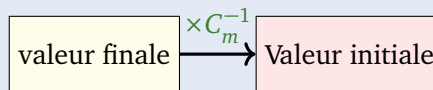
**5. Évolution réciproque**

**Propriété 5 : taux d'évolution réciproque**

On considère une quantité qui évolue d'un taux  $t$ .

- ▶ Le **taux d'évolution réciproque** est le taux d'évolution qui permet de passer de la valeur finale à la valeur initiale.
- ▶ Le **coefficient multiplicateur réciproque** est donné par

$$C_m^{-1} = \frac{1}{C_m}$$



- ▶ Le **taux d'évolution réciproque**, noté  $t_r$ , est défini par

$$C_m^{-1} = 1 + t_r \quad \text{ou encore} \quad t_r = C_m^{-1} - 1$$

**Méthode 3 : calculer un taux d'évolution réciproque**

Calculer le taux d'évolution réciproque pour une baisse de 20 %.

**Corrigé**

Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 20 % est  $C_m = 1 - \frac{20}{100} = 0,8$ .

Ainsi, le coefficient multiplicateur réciproque est  $C_m^{-1} = \frac{1}{0,8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$ .

Par conséquent, le taux d'évolution réciproque est

$$t_r = C_m^{-1} - 1 = 0,25.$$

Pour compenser une baisse de 20 %, il faut donc une augmentation de 25 %.

## II Les exercices

### Exercice 1 Nombre d'élèves d'un lycée

Dans un lycée, le nombre d'élèves de secondes est égal à 248, ce qui représente 20 % du nombre d'élèves du lycée.

Déterminer le nombre d'élèves du lycée.

### Exercice 2 Le Scrabble

Dans un jeu de Scrabble, 45 % des lettres sont des voyelles. Parmi ces dernières,  $\frac{1}{3}$  sont des E.

Déterminer la proportion de E dans le jeu.

### Exercice 3 Projet d'agrandissement

Seulement 42 % des électeurs inscrits sont allés voter. Le maire a obtenu 40 % de votes favorables à son projet d'agrandissement du stade de football. Quel pourcentage d'électeurs ont exprimé leur soutien au maire ?

### Exercice 4 Prix après remise

Le nouveau MacBook Air 13 pouces coûte 7 999 HKD.

Une boutique propose 4,5 % de réduction. Quel est son nouveau prix ? Arrondir le prix à l'unité.

### Exercice 5 Prix après hausse

Un article dont le prix affiché est 90 € subit une hausse de 3,5 %.

Déterminer son nouveau prix.

### Exercice 6 Expression algébrique

Une carte de fidélité d'un café permet d'obtenir une réduction de 5 % sur les boissons chaudes.

Exprimer le prix à payer en fonction du montant  $m$  des boissons consommées avant le rabais.

### Exercice 7 PIB de la France

Le PIB, indicateur macroéconomique majeur, est publié chaque trimestre en volume et en valeur.

Le tableau ci-dessous, publié sur le site de l'INSEE, donne le PIB de la France entre 2022 et 2024 en milliards d'euros.

	2022	2023	2024
<b>PRODUIT INTÉRIEUR BRUT NOMINAL - en Md€</b>	<b>2 639</b>	<b>2 818</b>	<b>2 931</b>

- Exprimer, en pourcentage, le taux d'évolution du PIB de la France, entre 2022 et 2023. Arrondir le résultat à l'unité.
- Exprimer, sous forme fractionnaire, le taux d'évolution du PIB de la France, entre 2023 et 2024.
- Quel est le coefficient multiplicateur de l'évolution du PIB de la France entre 2022 et 2024 ?

### Exercice 8 Coefficient multiplicateur associé à une évolution

Déterminer les coefficients multiplicateurs associés aux évolutions suivantes.

- |                    |                     |
|--------------------|---------------------|
| 1. Baisse de 10 %  | 5. Hausse de 100 %  |
| 2. Baisse de 0,5 % | 6. Hausse de 500 %  |
| 3. Hausse de 5 %   | 7. Baisse de 93 %   |
| 4. Hausse de 30 %  | 8. Hausse de 1,14 % |

**Exercice 9 Taux d'évolution**

Déterminer les taux d'évolution en pourcentage associés aux coefficients multiplicateurs suivants.

- 1.  $C_m = 1,02$
- 2.  $C_m = 1,34$
- 3.  $C_m = 0,98$
- 4.  $C_m = 2$
- 5.  $C_m = 3,5$
- 6.  $C_m = 0,43$
- 7.  $C_m = 1,0097$
- 8.  $C_m = 0,987$

**Exercice 10 Développement durable**

Dans le cadre d'une campagne de sensibilisation au tri des ordures ménagères, une enquête a été menée auprès de 3 500 habitants d'une ville, répartis comme suit :

- moins de 35 ans : 25 % ;
- entre 35 et 50 ans : 40 % ;
- plus de 50 ans : 35 %.

À la question : « Triez-vous le papier ? »

- 80 % des moins de 35 ans ont répondu « oui » ;
- 70 % des personnes âgées de 35 à 50 ans ont répondu « oui » ;
- 60 % des personnes de plus de 50 ans ont répondu « oui ».

1. Compléter le tableau suivant en indiquant les effectifs correspondants.

	Trie le papier	Ne trie pas le papier	Total
Moins de 35 ans			
Entre 35 et 50 ans			
Plus de 50 ans			
Total			

2. Déterminer la proportion de personnes interrogées qui trient le papier.

**Exercice 11 Concours d'admission à l'École polytechnique**

Au concours 2024 d'admission à l'École polytechnique, 24,4 % des élèves inscrits ont été admissibles et sont allés passer les oraux.

Parmi les admissibles, environ 40,56 % ont été admis.

- 1. Quelle est la proportion des élèves admis parmi les élèves inscrits ?
- 2. Sur les 4 357 élèves inscrits au concours, combien ont été admis ?

**Exercice 12 Taux d'évolution global 1**

La population d'une ville augmente de 1 % entre 2017 et 2018, puis de 2 % entre 2018 et 2019. Déterminer le taux d'évolution global entre 2017 et 2019.

**Exercice 13**                      **Variations absolue et relative**

Dans une entreprise, un employé a un salaire mensuel de 1 500 € en 2022.  
En 2023, il décide de travailler à temps partiel et son salaire mensuel passe à 1 200 €.  
Déterminer la variation absolue et la variation relative de son salaire.

**Exercice 14**                      **Fabrication de pièces détachées**

Pour la fabrication de pièces détachées, une entreprise a recours à deux entreprises.

- ▶ L'entreprise A qui produit 40 % des pièces ;
- ▶ l'entreprise B qui produit le reste.

La proportion de pièces ayant un défaut est de 4 % pour l'entreprise A et de 5 % pour l'entreprise B.

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la proportion de pièces défectueuses produites par les deux entreprises.

**Exercice 15**                      **Baisses successives**

Après deux baisses successives, la première de 5 % et la seconde de 10 %, un article vaut 444,60 €.  
Déterminer son prix initial.

**Exercice 16**                      **Étude d'une population**

La population d'une ville augmente de 2 % par an.  
Au bout de combien d'années aura-t-elle doublé ?

**Exercice 17**                      **Évolutions successives**

Après une augmentation de 8 %, puis une baisse de 2 %, un objet coûte 3 196,37 €.  
Quel était son prix initial ?

**Exercice 18**                      **Taux d'évolution global 2**

Quel taux d'évolution faut-il appliquer après une baisse de 12 %, puis une hausse de 10 %, pour retrouver la valeur initiale ?

**Exercice 19**                      **Un peu de géométrie**

1. On considère un rectangle. On diminue de 25 % sa longueur et de 75 % sa largeur.  
De quel pourcentage a diminué son aire ?
2. On considère un carré. On augmente la longueur de ses côtés d'un même pourcentage, afin que l'aire augmente de 96 %.  
De quel pourcentage a-t-on augmenté les côtés ?
3. On considère un cylindre. On augmente son rayon de 20 % et sa hauteur de 30 %.  
De quel pourcentage a augmenté son volume ?
4. On considère un triangle rectangle. On augmente un des côtés de l'angle droit de  $t$  %, et on diminue l'autre côté de l'angle droit de  $t$  %.  
Que peut-on dire de l'aire de ce triangle ?

**Exercice 20**                      **Remises successives**

Un commerçant effectue trois remises successives sur un article au prix initial de 500 € et le vend finalement 219,45 €.  
Déterminer les pourcentages des trois remises appliquées, sachant qu'il s'agit de trois valeurs entières consécutives.