

MATh.en.JEANS 2026–2027

DOSSIER DES QUATRE SUJETS DE RECHERCHE

🔍 La démarche du jeune chercheur

- **Expérimenter** : tester sur des petits cas concrets, dessiner, manipuler avec du matériel.
- **Conjecturer** : déceler des régularités et poser des hypothèses (« Et si... ? »).
- **Prouver & Argumenter** : valider par un raisonnement rigoureux et convaincre les autres.

👥 Esprit d'équipe & Objectif

- **Carnet de bord** : noter toutes les pistes testées, y compris les erreurs instructives.
- **Synergie** : tester, coder (Scratch/Python), modéliser et vulgariser ensemble.
- **Restitution finale** : concevoir posters, maquettes et présentations orales.

🧪 Les quatre sujets de recherche au choix

🎮 Sujet 1 – Puissance 3 (Théorie des jeux & Stratégies impartiales)

- | | |
|---|--|
| 1 | Explorer les petites grilles ($n = 3, 4, 5$) et déterminer qui possède une stratégie gagnante. |
| 2 | Exploiter la symétrie du plateau et généraliser aux grilles en anneau ou avec 2 couleurs. |

🔄 Sujet 2 – Carrés emboîtés de nombres (Suites de Ducci & Arithmétique)

- | | |
|---|--|
| 3 | Itérer les différences positives aux sommets et expliquer l'inévitable chute vers $(0, 0, 0, 0)$. |
| 4 | Analyser la parité des nombres et étudier ce qui se produit sur un triangle ou un pentagone. |

🏠 Sujet 3 – Plein de rectangles (Combinatoire, Pavages & Dénombrement)

- | | |
|---|--|
| 5 | Établir une méthode d'inventaire rigoureuse sans oubli sur des grilles carrées et rectangles. |
| 6 | Formuler des formules générales (sommes de carrés, nombres triangulaires) et tester des variantes. |

🏠 Sujet 4 – Quelle est mon adresse ? (Énigme de Ramanujan & Nombres triangulaires)

- | | |
|---|--|
| 7 | Trouver les maisons d'équilibre sur des rues de taille fixée ($n = 8, 49, 288$) par calcul ou programmation. |
| 8 | Relier carrés et sommes d'entiers consécutifs, et observer le ratio d'équilibre remarquable. |

PHILOSOPHIE & POSTURE

Comprendre l'esprit d'un atelier de recherche mathématique

MATH.en.JEANS 2026–2027

Guide de l'apprenti chercheur

QUELQUES RÈGLES DU JEU

CE QUE SIGNIFIE « CHERCHER » EN MATHÉMATIQUES

Règle n° 1 — Un travail authentique et personnel

Le travail doit impérativement venir de vous.

- **Ni internet, ni IA** : Ne cherchez pas les réponses en ligne et ne demandez pas la solution à une intelligence artificielle.
- **Vos seuls repères** : Les seuls adultes légitimes pour vous aiguiller sont votre professeur encadrant et le chercheur.
- **La valeur de l'effort** : Un résultat modeste ou une conjecture inachevée découverte **par vous-mêmes** a infiniment plus de valeur pédagogique et scientifique qu'un texte brillant copié ailleurs, qui n'aura rigoureusement aucun intérêt.

Règle n° 2 — En mathématiques, le chemin prime sur le résultat

En sciences, ce qui importe le plus n'est pas le résultat brut, mais **la façon rigoureuse dont on l'obtient**.

- Affirmer qu'une propriété est vraie (ou fausse) ne suffit pas : il faut absolument **expliquer pourquoi**.
- Les exemples confirment une intuition, mais ils ne constituent pas une preuve.
- À chaque étape de votre réflexion, posez-vous la question : « *Comment convaincre un camarade sceptique que mon affirmation est indiscutable ?* »

Règle n° 3 — Poser soi-même de bonnes questions

Le but de cet atelier n'est **pas** de répondre à une « question 1 » puis à une « question 2 » comme dans un devoir surveillé classique.

- **Faire de la recherche** : C'est apprendre à forger ses propres interrogations. Une bonne question n'est ni trop triviale, ni décourageante, et sa réponse doit ouvrir la porte à de nouveaux mystères.
- **Liberté de parcours** : Les questions indiquées sur les fiches sont de simples **pistes de départ**. Vous avez le droit de les réorganiser, de les modifier, d'en ignorer certaines et d'en créer de nouvelles.
- **Des pièges volontaires** : Certaines questions sont parfois formulées de façon ouverte, sans ordre chronologique évident, voire volontairement ardues. C'est le quotidien des chercheurs : **c'est fait exprès !**

 **Le mot du labo** : L'erreur n'est pas une faute, c'est le moteur de la découverte. Une piste qui échoue permet d'éliminer une fausse route et éclaire la bonne voie. Notez tout dans votre carnet de bord !

FICHE DE RECHERCHE 1

Thématique : Théorie des jeux & Stratégies impartiales

MATH.en.JEANS 2026–2027

Sujet proposé par Benoît Rittaud

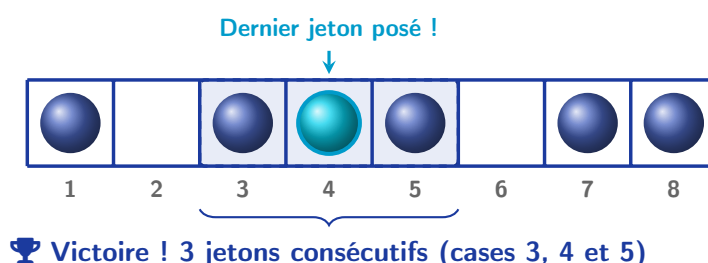
PUISSANCE 3

UN DUEL STRATÉGIQUE SUR UNE LIGNE

Les règles du jeu

Sur un plateau composé de plusieurs cases alignées, deux joueurs posent **chacun à leur tour** un jeton bleu sur une case libre.

- Tous les jetons sont de la **même couleur** (bleu).
- Le premier joueur qui réussit à faire apparaître **trois jetons sur trois cases consécutives** a immédiatement gagné la partie !



Premières expérimentations

1. **À vos marques !** Jouez 5 à 10 parties à deux sur une feuille avec un camarade.
2. **Grille de 3 cases** : Qui gagne forcément ? Pourquoi ?
3. **Grille de 4 cases** : Le joueur 1 peut-il s'assurer de gagner à tous les coups ? Quel doit être son premier coup ?
4. **Grille de 5 cases** : Que se passe-t-il si le joueur 1 joue au milieu ?
5. **Arbre des possibles** : Dessinez toutes les parties possibles pour une grille de 4 cases.

Pistes & Variantes du chercheur

- **Généralisation** : Existe-t-il une règle générale si la grille contient n cases ?
- **Symétrie du plateau** : Le deuxième joueur peut-il copier les coups du premier par symétrie pour l'emporter ?
- **Changement de couleur** : Et si chaque joueur possède ses propres jetons (rouge contre bleu) ?
- **Plateau en anneau** : Que devient le jeu si la ligne est refermée en cercle (sans bords) ?
- **Plus de joueurs** : Que se passe-t-il si on joue à 3 ?

🔧 **Conseil pour votre carnet de recherche** : Numérotez les cases de 1 à n sur votre cahier pour noter les coups joués sous la forme : *J1 joue case 3, puis J2 joue case 1...* Cela évitera de rejouer deux fois les mêmes parties sans s'en rendre compte !

FICHE DE RECHERCHE 2

Thématique : Suites de Ducci, Arithmétique & Motifs

MATH.en.JEANS 2026-2027

Sujet proposé par Benoît Rittaud

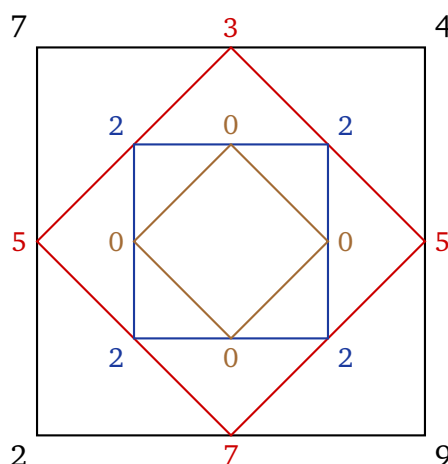
CARRÉS EMBOÎTÉS DE NOMBRES

L'INÉVITABLE CHUTE VERS ZÉRO ?

La règle de construction

On place quatre nombres entiers positifs sur les quatre sommets d'un grand carré.

- Au milieu de chaque côté, on écrit la **différence positive** (le plus grand moins le plus petit) entre les deux sommets reliés.
- On relie ces quatre milieux pour former un nouveau carré intérieur, puis **on recommence l'opération** jusqu'à obtenir un carré formé de quatre zéros (0, 0, 0, 0).



Premières pistes de calcul

1. **À vos brouillons!** Choisissez 4 entiers au hasard et comptez le nombre d'étapes pour atteindre (0, 0, 0, 0).
2. **Cas faciles :** Que se passe-t-il si les 4 nombres de départ sont tous égaux? S'ils forment une suite $n, n+1, n+2, n+3$?
3. **Évolution des sommes :** La somme des 4 nombres diminue-t-elle forcément à chaque carré?
4. **Évolution du maximum :** Le plus grand nombre peut-il augmenter d'un carré au suivant?
5. **Le record :** Pouvez-vous trouver 4 nombres (inférieurs à 20) demandant **plus de 5 étapes**?

Mystères & Généralisations

- **Chute garantie?** Est-on absolument certain de toujours tomber sur un carré de zéros, quels que soient les nombres de départ?
- **La parité (Pair / Impair) :** Observez la parité des nombres à chaque étape. Que remarquez-vous après 4 étapes?
- **Avec un triangle (3 sommets) :** Que se passe-t-il en partant de (1, 0, 0)? Obtient-on un jour des zéros?
- **Avec un pentagone (5 sommets) :** Même question! Les polygones impairs se comportent-ils comme le carré?
- **Et avec des décimaux?** Si on part de nombres non entiers (ex. 0,5), le jeu s'arrête-t-il?

Astuce de chercheur : Pour tester rapidement beaucoup d'exemples sans redessiner les carrés à chaque fois, notez simplement vos étapes en ligne : $(7, 4, 9, 2) \rightarrow (3, 5, 7, 5) \rightarrow (2, 2, 2, 2) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$. Les élèves qui aiment coder en Scratch ou en Python peuvent aussi programmer un simulateur!

FICHE DE RECHERCHE 3

Thématique : Combinatoire, géométrie & dénombrement

MATH.en.JEANS 2026–2027

Sujet proposé par Benoît Rittaud

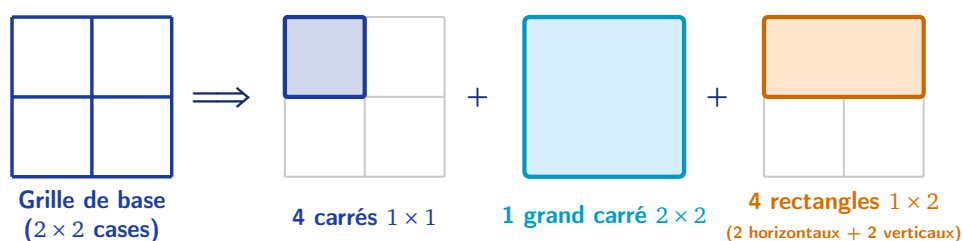
PLEIN DE RECTANGLES

COMPTER SANS OUBLIER, NI COMPTER DEUX FOIS

Le problème

On considère une grille rectangulaire formée de petits carrés identiques. En suivant les lignes de la grille, on peut y repérer de nombreux carrés et rectangles de tailles différentes.

- On compte les **carrés**, quelle que soit leur taille.
- On compte également les **rectangles non carrés**.
- Chaque figure doit être comptée **une seule fois**.



Bilan pour la grille 2×2 : 5 carrés ($4 + 1$) + 4 rectangles non carrés = **9 rectangles au total.**

Premières expérimentations

1. **Grille 2×2 :** comptez tous les carrés et tous les rectangles.
2. **Grille 3×3 :** combien trouvez-vous de carrés ? Combien trouvez-vous de rectangles ?
3. **Organisation :** classez les figures par taille : 1×1 , 1×2 , 2×2 , etc.
4. **Grille 4×4 :** vérifiez vos résultats en utilisant une méthode différente.
5. **Attention aux oublis :** comment être certain de ne compter aucune figure deux fois ?

Questions de recherche

- **Grille carrée :** combien de carrés peut-on tracer dans une grille $n \times n$?
- **Tous les rectangles :** combien y en a-t-il dans une grille $n \times n$?
- **Grille rectangulaire :** que se passe-t-il dans une grille $p \times q$?
- **Carrés de côté impair :** combien de carrés de côté impair trouve-t-on ?
- **Comparaison :** une grille 5×4 contient-elle plus de carrés qu'une grille 4×4 ? De combien ?
- **Variantes :** que se passe-t-il avec une grille incomplète, une grille trouée ou des carrés inclinés ?

Méthode de chercheur : pour compter efficacement, choisissez d'abord les deux lignes verticales qui délimitent la figure, puis les deux lignes horizontales. Cette organisation permet d'éviter les oublis et les doublons.

FICHE DE RECHERCHE 4

MATH.en.JEANS 2026–2027

Thématique : Arithmétique, Énigme de Ramanujan & Sommes

D'après un sujet de Cyrielle Ospel (2024–2025)

QUELLE EST MON ADRESSE ?

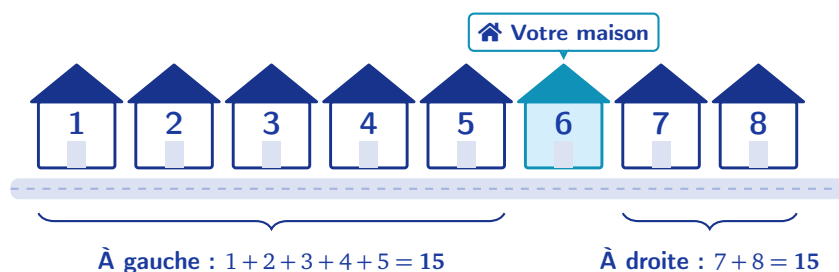
L'ÉQUILIBRE PARFAIT DES NUMÉROS DE RUE

L'énigme

Vous habitez dans une rue où toutes les maisons sont situées du **même côté**. Elles sont numérotées consécutivement : $1, 2, 3, \dots, n$ (sans saut de numéro, ni côté pair/impair).

Un jour, vous découvrez une propriété remarquable :

**La somme des numéros situés à votre gauche est exactement égale
à la somme des numéros situés à votre droite !**



Premières vérifications

- Rue de 8 maisons** : Vérifiez pas à pas avec le schéma ci-dessus que la maison numéro 6 fonctionne bien.
- Rue de 10 maisons** : Est-ce possible d'habiter dans une rue de 10 maisons ? Testez plusieurs numéros pour justifier.
- Petites rues** : Existe-t-il une solution pour une rue de moins de 8 maisons ? (Essayez avec 2, 3 ou 5 maisons).
- Rue de 49 maisons** : Si la rue compte 49 maisons, montrez que le numéro 35 est une solution.
- Rue de 288 maisons** : Quelle pourrait être votre adresse si la rue a 288 maisons ?

Mystères & Pistes de recherche

- **N'importe quelle longueur** ? Toutes les longueurs de rues permettent-elles d'avoir une maison d'équilibre ? Pourquoi ?
- **Lien avec les carrés** : Si on appelle k votre numéro et n le nombre de maisons, montrez que :

$$k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Où se situe la maison** ? Calculez le rapport $\frac{\text{numéro}}{\text{nombre de maisons}}$ pour $n = 8, 49, 288$. Que remarquez-vous de fascinant ?
- **Programmation** : Écrivez un script (Scratch ou Python) qui teste toutes les rues jusqu'à 5 000 maisons pour trouver la solution suivante !

 **La petite histoire des maths** : Lorsque cette énigme fut posée au célèbre mathématicien indien **Srinivasa Ramanujan** en 1914 alors qu'il cuisinait, il donna immédiatement non seulement la solution pour 288 maisons, mais une méthode pour trouver **toutes** les solutions à l'infini grâce aux fractions continues !